Capítulo 5
El condensador, la bobina y el transformador

5.1 El condensador

El condensador es un componente electrónico que tiene la propiedad de almacenar carga eléctrica. La tensión entre sus terminales es proporcional a la carga almacenada. A consecuencia de esta propiedad, la corriente que circula a través de él es proporcional a la derivada de la tensión entre sus terminales. Por tanto, a diferencia de los elementos resistivos, su característica no puede representarse en los ejes de coordenadas corriente-tensión. El condensador real suele aproximarse por un elemento de circuito denominado condensador ideal, que se define a continuación.

5.1.1 El condensador ideal

El *condensador ideal* es un elemento de circuito que tiene la propiedad de almacenar energía en forma de campo eléctrico, cuando se acumula una carga eléctrica en su interior. Si la carga que almacena es q, la tensión entre sus dos terminales, v_c, viene dada por:

$$v_c = \frac{q}{C} \tag{5.1}$$

La constante de proporcionalidad C se denomina *capacidad*. La unidad de capacidad es el *faradio (F)*. De acuerdo con 5.1:

1 faradio = 1 culombio / 1 voltio

es decir, un faradio es la capacidad de un condensador que presenta entre sus terminales una tensión de un voltio cuando la carga que almacena es de un culombio. El símbolo circuital del condensador se representa en la figura 5.1a. En la figura 5.1b se representa un dibujo esquemático de un tipo de condensador: *el condensador plano.* Este condensador está constituido por dos placas conductoras de igual área A, separadas por un aislante o dieléctrico, de espesor d y permitividad ε. Además de éste, existen otros tipos de condensadores, tales como los cilíndricos, esféricos,... constituidos también por dos placas conductoras (de forma cilíndrica, esférica,...) separadas por un aislante.

Recordando la definición de intensidad:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

y derivando los dos miembros de la expresión 5.1, se halla una expresión alternativa:

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} \tag{5.2}$$

donde i_c es la corriente que entra al condensador. Esta expresión pone de manifiesto dos propiedades muy importantes de un condensador:

— *La tensión v_c entre sus terminales no puede variar de forma discontinua.* Si lo hiciera, la expresión 5.2 indicaría que debería circular una corriente de valor infinito, que no existe en el mundo real.
— *Cuando la tensión v_c se hace constante*, *el condensador* se comporta como un *circuito abierto*, puesto que i_c es nula.

En las expresiones 5.1 y 5.2 hay que tener en cuenta que los signos de q, i_c y v_c son los indicados en la figura 5.1a.

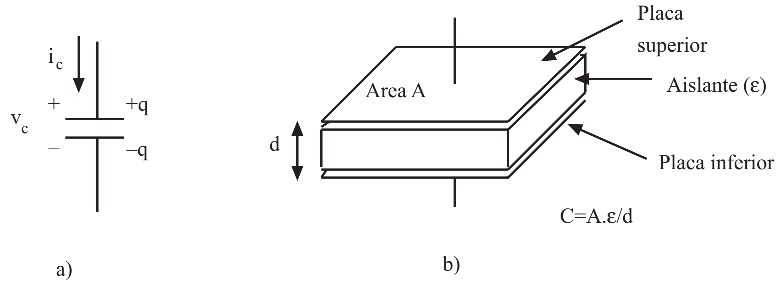

Fig. 5.1 a) Símbolo circuital del condensador. b) Estructura de un condensador plano

Ejemplo 5.1

Calcular la carga almacenada en un condensador de 1 μF si la tensión entre terminales es de 5 V.

La carga almacenada por el condensador será q = Cv_c. Sustituyendo valores numéricos resulta:

$$q = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ culombios}$$

Ejercicio 5.1

Considerar un condensador de 1 nF y otro de 1 μF. Ambos pierden una carga de 10^{-6} C. ¿Cuál es la variación de la tensión entre terminales en cada condensador?

Solución:

La disminución de tensión entre los terminales del condensador de 1 μF será de 1 V, mientras que en el de 1 nF sería de 1000 V.

———— ♦ ————

En la definición 5.1 las variables primarias de un condensador son la tensión y la carga. Sin embargo, en el análisis de circuitos se suele trabajar con tensiones y corrientes. La relación entre carga y corriente permite deducir otra expresión alternativa a la 5.1:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i_c(\tau).d\tau \tag{5.3}$$

donde se supone que la carga en el condensador es nula cuando t → –∞. Sustituyendo en 5.1:

$$v_c(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau).d\tau}{C} \tag{5.4}$$

Esta formulación integral se expresa, a veces, de otra forma más conveniente para la manipulación matemática. La integral entre –∞ y t se descompone en la suma de dos integrales: una desde –∞ a cero, y otra desde cero a t. La primera integral representa la carga almacenada hasta t = 0, que denominaremos q(0). Entonces:

$$\int_{-\infty}^{t} i_c.d\tau = \int_{-\infty}^{0} i_c.d\tau + \int_{0}^{t} i_c.d\tau = q(0) + \int_{0}^{t} i_c.d\tau \tag{5.5}$$

Así pues, una expresión alternativa a 5.4 es:

$$v_c(t) = \frac{q(0) + \int_{0}^{t} i_c(\tau).d\tau}{C} = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_c(\tau).d\tau \tag{5.6}$$

en la cual la tensión entre terminales depende de la *carga inicial, q(0),* y de la carga almacenada desde t = 0. Obsérvese que, cuando el condensador tiene almacenada una carga inicial, la tensión entre sus terminales en t = 0 es $v_c(0)$ = q(0)/C, que es la tensión "inicial" generada por la carga inicial del condensador. La expresión 5.6 muestra que un *condensador con carga inicial puede modelarse por una fuente de tensión constante, de valor $v_c(0)$, en serie con un condensador descargado.*

Ejemplo 5.2

Se conecta entre los terminales de un condensador de 1 μF una fuente independiente de corriente cuya forma de onda se representa en la figura 5.2a. Calcular y representar la tensión en bornes del condensador en función del tiempo. Suponer que la carga del condensador en t = 0 es nula.

Entre t = 0 y t = 2ms el condensador se carga con una intensidad constante de 5mA.

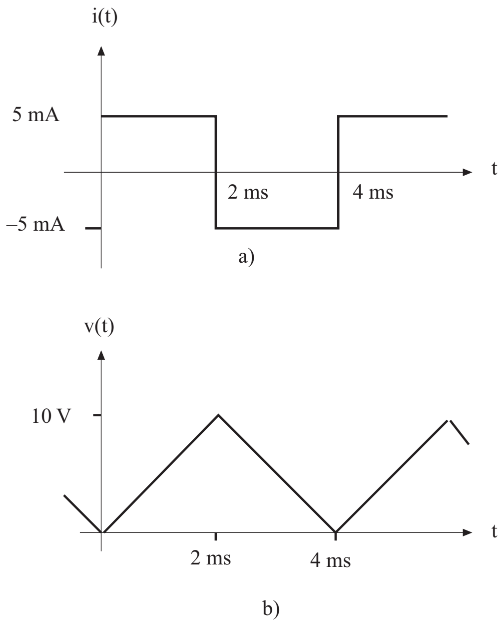

Fig. 5.2 a) Forma de onda de la corriente que carga al condensador del ejemplo 5.2. b) Forma de onda de la tensión en bornes del condensador

Aplicando 5.6, y teniendo en cuenta que q(0) = 0, resulta:

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t 5\cdot 10^{-3}.d\tau = \frac{5\cdot 10^{-3}t}{C} = 5\cdot 10^3 t$$

que es una rampa de pendiente positiva, que parte del origen y alcanza los 10 V cuando t = 2ms. Entre t = 2ms y t = 4ms, la expresión 5.6 conduce a:

$$v_c(t') = 10 + \frac{1}{C}\int_0^{t'}(-5\cdot 10^{-3}).d\tau = 10 - 5\cdot 10^3 t'$$

donde, para facilitar la operación matemática, hacemos t' = t – 2ms. El resultado es una rampa que parte de 10 V y alcanza 0 V al cabo de 2 ms.

La forma de onda de la tensión en bornes del condensador se representa en la figura 5.2b.

Ejercicio 5.2

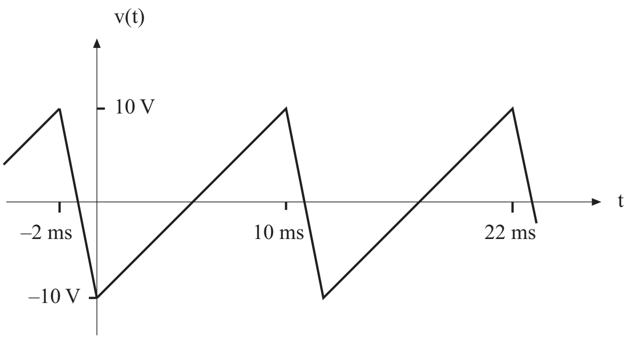

Fig. 5.3 Forma de onda de la tensión en bornes del condensador del ejercicio 5.2

Hallar la forma de onda de la corriente que circula por un condensador de 5 μF, sabiendo que la forma de onda de la tensión en sus terminales es la representada en la figura 5.3.

Solución:

La forma de onda de la corriente será una señal rectangular cuyos pulsos positivos serán de 10 mA de amplitud y 10 ms de duración, y los negativos de –50 mA y de 2 ms de duración.

Ejemplo 5.3

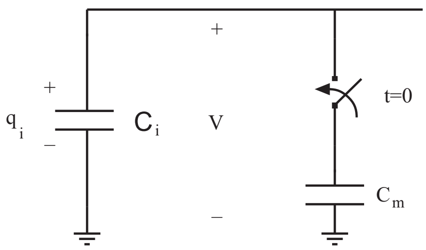

Fig. 5.4 Fenómeno de compartimiento de carga (ejemplo 5.2). Antes de cerrar el interruptor, V es de 5 V. Después vale V_f

En los circuitos integrados a muy gran escala (VLSI) suele ser importante el fenómeno de *compartimiento de carga*. Una forma electrónica de almacenar información consiste en "guardar " carga en un condensador. Si está cargado guarda un "1", mientras que si está descargado guarda un "0". Supongamos que un condensador C_i contiene una carga tal que la tensión entre sus terminales es 5 V. Para "leer" la información guardada en el condensador hay que medir la tensión en bornes del condensador, conectándole un circuito de medida. Supongamos que este circuito equivalga a un condensador C_m que supondremos descargado (figura 5.4). Al conectar el condensador de medida, la carga guardada en C_i se distribuye entre C_i y C_m, lo que hace disminuir la tensión en bornes de C_i, y si ésta fuera inferior a un cierto umbral sería interpretado como que el condensador "guarda" un "0", en lugar de guardar un "1", como realmente hace. El objetivo de este ejemplo consiste en calcular la tensión en bornes de C_i después de conectar C_m.

En t < 0 la carga total del circuito es:

$$q_T = q_{io} + q_{mo} = 5C_i + 0 = 5C_i$$

Una vez conectado el circuito de medida, la carga total del conjunto continúa siendo la misma, ya que se ha supuesto nula q_{mo} (carga inicial de C_m). Al estar conectados en paralelo los dos condensadores tendrán entre sus terminales la misma tensión, lo cual exige que la carga antes almacenada en C_i se "comparta" con C_m, por lo que los valores finales de tensión y carga serán:

$$q_T = q_{if} + q_{mf} = V_f C_i + V_f C_m = V_f (C_i + C_m)$$

Igualando esta expresión con la anterior:

$$V_f = 5\frac{C_i}{C_i + C_m}$$

Para que el efecto de compartimiento de carga tenga poca incidencia se requiere que C_m sea muy inferior a C_i.

Tal como ha sido resuelto este ejercicio, el lector podría sacar la impresión de que la tensión en bornes de los dos condensadores cambia instantáneamente al cerrar el interruptor. Pero, como se ha comentado anteriormente, esta variación discontinua de la tensión no es posible. En efecto, para simplificar el circuito, no se han representado las resistencias asociadas a los conductores y al interruptor, que siempre están presentes, las cuales, como se verá más adelante, implican que se llega a un valor final estable después de transcurrir cierto tiempo.

5.1.2 Principio físico de funcionamiento

El principio físico del condensador se basa en que la carga almacenada en las placas del condensador crea un campo eléctrico entre dichas placas, el cual origina una diferencia de potencial entre ellas. Consideremos la figura 5.5. Una corriente i inyecta cargas positivas a la placa superior del condensador. El aislante entre placas les impide el paso a la placa inferior, y obliga a que queden almacenadas en dicha placa. Estas cargas almacenadas en la placa superior originan un campo eléctrico que "expulsa" cargas positivas de la placa inferior (ley de Coulomb) y por tanto "carga" a

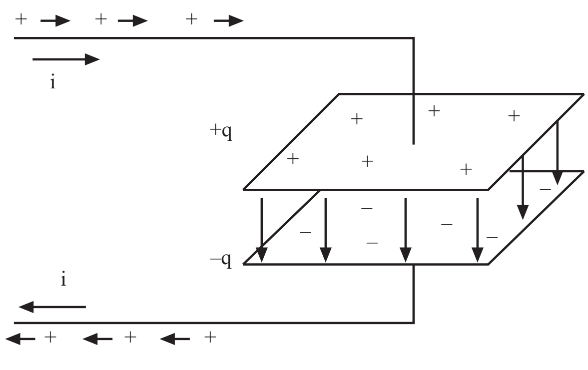

Fig. 5.5 Almacenamiento de cargas y campo eléctrico en un condensador

la placa inferior con una carga igual y de signo contrario a la almacenada en la placa superior. Las cargas positivas expulsadas de la placa inferior circulan por el terminal inferior y dan continuidad a la corriente: la corriente que sale del terminal inferior es igual a la que entra por el superior. El campo eléctrico entre placas provoca que éstas estén a diferente potencial. Nótese también que en el condensador hay neutralidad global de carga: la carga de la placa superior es igual y de signo contrario a la de la placa inferior.

En un condensador plano se demuestra que el campo eléctrico entre placas vale aproximadamente:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

donde σ es la densidad superficial de carga en la placa (q/A) y ε la permitividad del aislante. El espesor de este aislante es d, que se supone igual a la separación entre placas. Por tanto la diferencia de potencial entre placas será:

$$v_c = \left|\vec{E}\right| .d$$

y sustituyendo el campo eléctrico dado por la expresión anterior resulta:

$$v_c = \frac{\sigma}{\varepsilon}.d = \frac{q}{A.\varepsilon}.d = \frac{q}{A.\varepsilon/d} = \frac{q}{C}$$

La capacidad del condensador plano, por tanto, viene dada por:

$$C = \frac{A.\varepsilon}{d} \tag{5.7}$$

5.1.3 Asociación de condensadores

De forma similar a lo que ocurría con las resistencias, a veces los condensadores aparecen en un circuito conectados en serie o en paralelo. También en este caso pueden ser sustituidos por condensadores equivalentes. Consideremos la figura 5.6a, en la que los condensadores C_1 y C_2 aparecen conectados en paralelo. La tensión entre terminales es v, por lo que la carga inyectada al conjunto de los dos condensadores, suponiendo que ambos estaban inicialmente descargados, es:

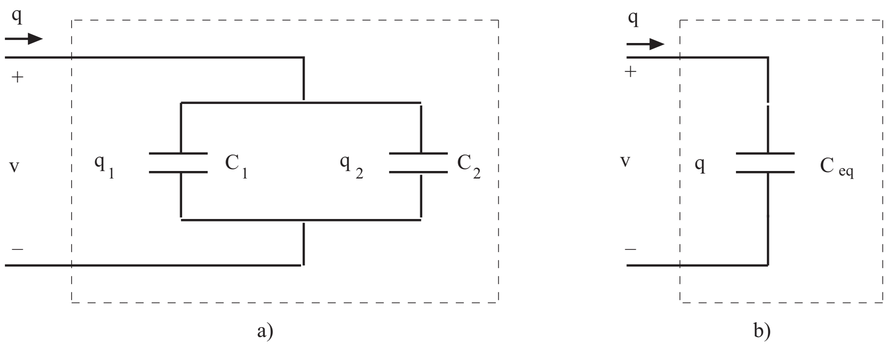

Fig. 5.6 a) Condensadores conectados en paralelo. b) Condensador equivalente

$$q = q_1 + q_2 = vC_1 + vC_2 = v(C_1 + C_2)$$

El condensador de la figura 5.6b, con una tensión v entre terminales, tiene una carga almacenada de:

$$q = vC_{eq}$$

Para que este último condensador sea equivalente a los dos conectados en paralelo se requiere que para la misma tensión entre terminales tenga la misma carga inyectada. Comparando las dos expresiones anteriores es inmediato verificar que debe cumplirse que:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \tag{5.8}$$

Es decir, cuando dos condensadores están conectados en paralelo equivalen a uno cuya capacidad es la suma de las capacidades. Esta expresión puede generalizarse al caso de n condensadores conectados en paralelo: el valor de la capacidad equivalente es la suma de todas las capacidades.

En la figura 5.7a se representan los condensadores C_1 y C_2, que se suponen inicialmente descargados, conectados en serie. La corriente que circula por ambos condensadores es la misma, por lo que las cargas que almacenan también lo son. Por tanto, la tensión entre terminales será:

$$v = v_1 + v_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]$$

En el condensador de la figura 5.7b la relación entre la tensión y la carga es:

$$v = \frac{q}{C_{eq}}$$

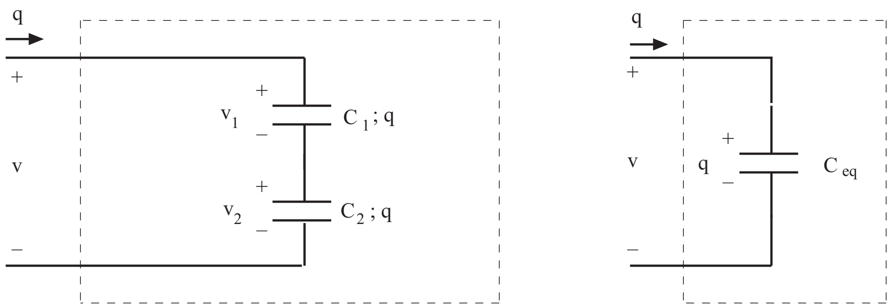

Fig. 5.7 a) Condensadores conectados en serie. b) Condensador equivalente

Para que sean equivalentes, a igualdad de tensión debe haber igualdad de carga almacenada, lo cual implica que:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{5.9}$$

es decir, y generalizando para dos o más condensadores, la inversa de la capacidad equivalente de varias capacidades conectadas en serie es la suma de las inversas de todas ellas.

Ejercicio 5.3

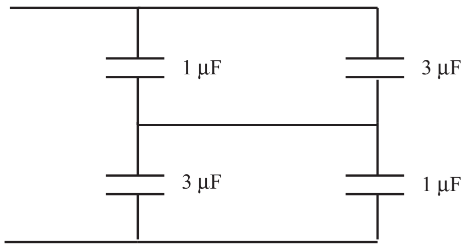

Fig. 5.8 Circuito del ejercicio 5.3

Hallar la capacidad equivalente del conjunto de condensadores de la figura 5.8.
Solución: *2 μF*

——— ♦ ———

Obsérvese que estas reglas de equivalencia son "contrarias" a las que rigen para las resistencias. La regla para condensadores en paralelo es análoga a la de resistencias en serie y viceversa.

Los condensadores ideales aproximan el comportamiento de los condensadores reales. Las características de éstos y sus desviaciones respecto a este modelo ideal se tratan en el apéndice A. En particular hay que destacar que un condensador real puede deteriorarse si se aplica entre sus terminales una tensión superior a un valor límite denominada *tensión máxima de trabajo* (ver apéndice A).

5.2 Análisis de circuitos RC

El análisis de circuitos que contienen resistencias y condensadores se basa en la aplicación de las leyes de Kirchhoff, al igual que en los circuitos puramente resistivos. La única diferencia estriba en que los condensadores presentan una dependencia diferencial entre la tensión y la corriente en lugar de la relación de proporcionalidad que regía en el caso de las resistencias. Esta dependencia diferencial da lugar a ecuaciones en las que aparecen la incógnita y sus derivadas, motivo por el cual se denominan *ecuaciones diferenciales.*

La resolución de las ecuaciones diferenciales requiere el conocimiento de técnicas matemáticas específicas que no pueden ser desarrolladas en un texto de electrónica básica como éste. Para aquellos lectores que no las conozcan, y para evitar aplazar el estudio a un primer nivel de estos circuitos a la espera que las adquieran, daremos una breve descripción del procedimiento que se debe seguir sin pretender con ello suplir la adquisición rigurosa de dichos conocimientos.

En este capítulo sólo resolveremos circuitos que originan un tipo determinado de ecuaciones diferenciales: las de primer orden con coeficientes constantes, es decir, aquellas que están formadas por una combinación lineal de la variable y su primera derivada. Existen, por supuesto, circuitos que dan lugar a ecuaciones diferenciales más complicadas, los cuales no serán estudiados por el momento.

5.2.1 Respuesta de un condensador a señales en escalón

Consideremos el circuito de la figura 5.9, en el que el interruptor se cierra en el instante t = 0. El condensador está inicialmente descargado (q(0) = 0), por lo que al cerrar el interruptor el condensador iniciará un proceso de *carga*. La señal que se aplica al conjunto R–C es un escalón de tensión. Se suele denominar a este análisis *respuesta al escalón.*

Para t ≥ 0 la ecuación de Kirchhoff de la malla es:

$$V_a = i_c R + v_c \tag{5.10}$$

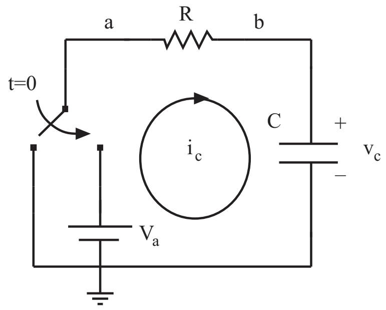

Fig. 5.9 Circuito de carga de un condensador a través de una resistencia

Esta ecuación contiene dos incógnitas: i_c y v_c. Para resolverla hace falta una ecuación extra que relacione i_c y v_c. Se puede optar por utilizar la ecuación 5.2 o la ecuación 5.6. En el primer caso resulta una ecuación en que la incógnita es v_c. En el segundo caso la incógnita es i_c. Resolveremos las dos opciones.

Sustituyendo la ecuación 5.2 en 5.10:

$$V_a = RC\frac{dv_c}{dt} + v_c \tag{5.11}$$

que es una *ecuación diferencial en* v_c. A diferencia de las ecuaciones algebraicas, la solución de una ecuación diferencial es una función de la variable respecto a la que se deriva. En este caso la solución será la función $v_c(t)$.

El *procedimiento* que se debe seguir *para resolver este tipo* de ecuaciones diferenciales es el siguiente:

1. Escribir la ecuación de forma estándar: los términos que contienen la incógnita y sus derivadas se escriben en el primer miembro de la igualdad. El resto de los términos en el segundo miembro.

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V_a \tag{5.12}$$

2. Hallar la solución general de la ecuación homogénea. La ecuación homogénea es la constituida por el primer miembro de 5.12 igualado a cero:

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0 \tag{5.13}$$

Para resolver esta ecuación se ensaya una solución del tipo $v_c = e^{a.t}$, y se determina el parámetro *a* para que sea solución. Sustituyendo esta expresión y su derivada en 5.13, resulta:

$$RCe^{at}a + e^{at} = 0 \Rightarrow e^{at}(aRC + 1) = 0 \tag{5.14}$$

Para que e^{at} sea solución se requiere que se cumpla 5.14. Esta ecuación se cumplirá si e^{at} es nula, o si el paréntesis es nulo. La primera alternativa no es adecuada, puesto que implica únicamente la solución trivial $v_c = 0$. Por el contrario, la segunda significa que:

$$a = -\frac{1}{RC} \tag{5.15}$$

que conduce a una solución no nula para v_c. La solución general de la ecuación homogénea viene dada por el producto de la exponencial por una constante arbitraria:

$$v_{ch} = Ke^{-t/RC} \tag{5.16}$$

tal como puede verificarse sustituyendo esta expresión en 5.13.

Obsérvese que esta forma de resolver la ecuación homogénea no es en absoluto "caprichosa". La ecuación 5.13 podría ser resuelta de forma directa sin más que reordenar sus términos:

$$\frac{dv_c}{v_c} = -\frac{dt}{RC} \tag{5.17}$$

Integrando ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} \ln(v_c) &= k_1 - \frac{t}{RC} \\ v_c &= e^{k_1}e^{-t/RC} = Ke^{-t/RC} \end{aligned} \tag{5.18}$$

que es la solución obtenida por el procedimiento anterior. Nótese que para que pueda cumplirse 5.13 se requiere que v_c y su derivada sean funciones del mismo tipo. Si no lo fueran, no podría ser nula una combinación lineal de la función y su derivada. La función exponencial cumple esta propiedad.

3. Hallar *una* solución particular de la ecuación completa. Para este tipo de ecuación, en la que el segundo miembro de la igualdad es una constante, se prueba una solución del tipo $v_c = B$, siendo B una constante. Sustituyendo este valor en la ecuación completa resulta:

$$\begin{aligned} RC \cdot 0 + B &= V_a \\ B &= V_a \end{aligned} \tag{5.19}$$

Por tanto, la solución particular será:

$$v_{cp} = V_a \tag{5.20}$$

4. Formular la *solución matemática* de la ecuación diferencial. Esta solución se compone de la suma de la solución general de la ecuación homogénea más la solución particular:

$$v_c = v_{ch} + v_{cp} = Ke^{-t/RC} + V_a \tag{5.21}$$

En efecto, obsérvese que sustituyendo 5.21 en 5.12 se obtiene:

$$RC\frac{d(v_{ch}+v_{cp})}{dt} + (v_{ch}+v_{cp}) = \left[RC\frac{dv_{ch}}{dt} + v_{ch}\right] + \left[RC\frac{dv_{cp}}{dt} + v_{cp}\right] = V_a \tag{5.22}$$

que cumple la ecuación diferencial ya que el primer paréntesis es nulo, y el segundo vale V_a.

Es importante observar que hay infinitas soluciones matemáticas (expresiones que cumplen la ecuación): una para cada valor de K.

5. Hallar la *solución física*, es decir, escoger de entre todas las soluciones matemáticas la que tenga sentido físico. En este tipo de ecuaciones diferenciales, esta solución se halla haciendo que la solución matemática tome, para t = 0, el mismo valor que el que impone el comportamiento físico del circuito. En el circuito que estamos analizando, el condensador estaba inicialmente descargado, por lo que en t = 0:

$$v_c(0) = \frac{q(0)}{C} = 0 \tag{5.23}$$

Así pues, la expresión 5.21 para t = 0 debe tomar este valor:

$$Ke^0 + V_a = K + V_a = 0 \tag{5.24}$$

Por tanto, el valor que debe tomar K para que se cumpla esta condición inicial es:

$$K = -V_a \tag{5.25}$$

y la solución de la ecuación diferencial será:

$$v_c = -V_a e^{-t/RC} + V_a = V_a(1 - e^{-t/RC}) \tag{5.26}$$

La representación gráfica de la solución se da en la figura 5.10a. La solución 5.26 contiene dos términos: uno que se extingue al transcurrir el tiempo, que consecuentemente se denomina *régimen transitorio*, y otro que permanece invariable después de extinguido el primero, y que se denomina *régimen permanente.* En este circuito, el régimen transitorio viene dado por una ley exponencial con una constante de tiempo dada por el producto de la resistencia por la capacidad. Después de unas pocas constantes de tiempo (de tres a cinco, según la precisión que se requiera) este término adquiere un valor despreciable (ver capítulo 1, apartado 1.3.2). El régimen transitorio permite dar "continuidad" a v_c para pasar desde su valor inicial (0 V) a su valor final (V_a) (recuérdese que en un condensador v_c no puede cambiar de forma abrupta). El régimen permanente es V_a, que es invariable con el tiempo.

La corriente i_c, que carga al condensador, puede calcularse aplicando 5.2:

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = \frac{V_a}{R}e^{-t/RC} \tag{5.27}$$

La representación gráfica de esta corriente se da en la figura 5.10b. Para t = 0 el valor de i_c es V_a/R, y cuando

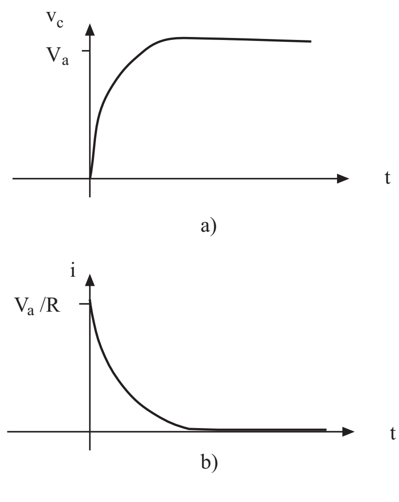

Fig. 5.10 Evolución de v_c en el circuito de la figura 5.7

t es mucho mayor que RC tiende a cero. Así pues, el régimen permanente de un condensador excitado por una tensión continua equivale a un circuito abierto: una vez cargado el condensador a la tensión V_a impide el paso de corriente a través de él.

Estos resultados tienen una fácil interpretación física. La tensión en bornes del condensador es proporcional a su carga. Inicialmente ésta es nula, y por tanto también lo es la tensión en el punto "b" de la figura 5.9. El punto "a" siempre está conectado (para $t \geq 0$) a V_a. Por tanto, en el instante inicial la caída de tensión en R será V_a, y la corriente será, en consecuencia, V_a/R. Esta corriente empezará a cargar el condensador, y a medida que se cargue aumentará v_c, y por tanto la tensión del punto "b". La caída de tensión en la resistencia disminuirá y, por tanto, también disminuirá la corriente. Pero aunque disminuya, esta corriente seguirá cargando al condensador e incrementando v_c, lo que provocará una ulterior disminución de la corriente. El proceso llega a un punto estable cuando v_c alcanza el valor V_a. En estas condiciones la caída de tensión en la resistencia es nula, lo que implica una corriente nula, y al ser nula la corriente deja de incrementarse la carga en el condensador, y por tanto no varía v_c.

La segunda alternativa para resolver el circuito consistía en sustituir la ecuación 5.6 en 5.10.

Esto conduce a la ecuación:

$$V_a = i_c R + \frac{q(0) + \int_0^t i_c . d\tau}{C} \tag{5.28}$$

que resulta ser una *ecuación integral* en i_c. Esta ecuación la transformamos en diferencial derivando ambos miembros de la igualdad respecto al tiempo:

$$0 = R\frac{di_c}{dt} + \frac{i_c}{C} \tag{5.29}$$

ya que V_a y q(0) son constantes. Multiplicando ambos miembros de la igualdad por C y aplicando el procedimiento descrito anteriormente para resolver una ecuación diferencial resulta:

1. $$RC\frac{di_c}{dt} + i_c = 0$$

2. $$i_c = e^{at}$$
$$RCe^{at}a + e^{at} = 0 \Rightarrow a = -1/RC$$
$$i_{ch} = Ke^{-t/RC}$$

3. $$i_c = B$$
$$RC0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$i_{cp} = 0$$

4. $$i_c = Ke^{-t/RC} + 0 = Ke^{-t/RC}$$

5. $$\textit{Físicamente}: \quad i_c(0^+) = V_a / R$$
$$\textit{Matemáticamente}: \quad i_c(0) = K$$
$$\textit{Luego} \quad K = V_a / R$$
$$\textit{Así pues} \quad i_c = \frac{V_a}{R}e^{-t/RC}$$

que es el mismo resultado que el hallado anteriormente. Nótese que el valor inicial de i_c debe ser una vez cerrado el interruptor, $i_c(0^+)$, diferente de $i_c(0^-)$. Aplicando la ecuación 5.6 podemos hallar v_c :

$$v_c = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{V_a}{R} e^{-\tau/RC}.d\tau = -V_a e^{-\tau/RC}\Big|_0^t$$
$$v_c = V_a(1 - e^{-t/RC})$$

que vuelve a coincidir con el resultado anterior.

Ejercicio 5.4

En el circuito de la figura 5.11 el condensador está inicialmente descargado. Se pide: a) Hallar la ecuación diferencial del circuito aplicando análisis de nudos. b) Hallar la expresión de la tensión en bornes del condensador. c) ¿Cuánto tiempo tardará aproximadamente en cargarse el condensador a su valor final?

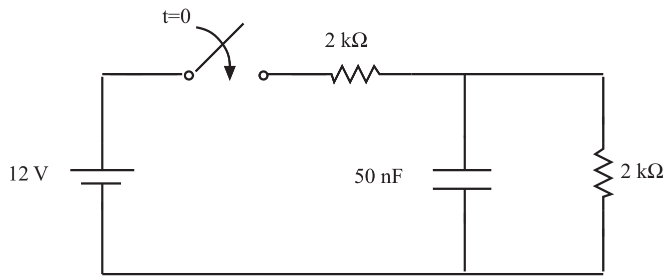

Fig. 5.11 Circuito del ejercicio 5.4

Solución:

$$\frac{12 - v_c}{2k\Omega} = C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{2k\Omega}$$
$$v_c(t) = 6 - 6e^{-t/\tau} \quad con \quad \tau = 1k\Omega \cdot 50nF$$
$$t_c \approx 3\tau = 150\mu s$$

——— ♦ ———

Analicemos a continuación la *descarga de un condensador*. Consideremos el circuito de la figura 5.12, en el que se muestra un condensador cargado inicialmente con q_o. Cuando se cierre el interruptor en t = 0 el condensador se irá descargando a través de la resistencia R.

Al tener el condensador una carga inicial q_o, presenta entre sus terminales una tensión inicial v_{co} de valor q_o/C. Al cerrar el interruptor, esta tensión se aplica a la resistencia, y por tanto circula inicialmente a través de ella una corriente de la valor v_{co}/R. Esta corriente está formada por las cargas almacenadas en el condensador por lo que la carga en éste disminuye de forma continua, lo que provoca que la tensión en sus terminales también lo haga, y por tanto también lo hará la corriente por la resistencia. Este proceso termina cuando el condensador ha perdido toda su carga. Entonces, al estar descargado, presenta una tensión nula, y en consecuencia también será nula la corriente por la resistencia. Es una situación final estable.

La resolución matemática de este circuito es la siguiente. La ecuación de malla, para t ≥ 0, es:

$$v_c = iR \tag{5.30}$$

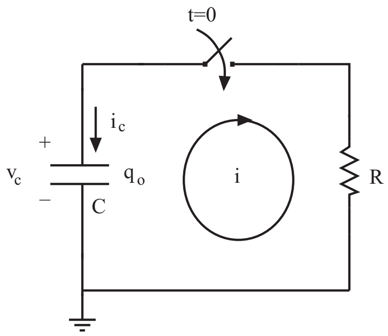

Fig. 5.12 Circuito de descarga de un condensador

La segunda ecuación necesaria para resolver el circuito es una modificación de la ecuación 5.6. En este circuito debe observarse que el sentido de i es contrario al definido en el primer apartado como corriente de carga del condensador i_c. Es una corriente que *descarga* al condensador en lugar de cargarlo. Por tanto, la carga en el condensador será:

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i_c . d\tau = q(0) - \int_0^t i . d\tau$$
$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_o - \int_0^t i . d\tau}{C} \tag{5.31}$$

Sustituyendo 5.31 en 5.30 y derivando respecto al tiempo resulta:

$$-\frac{i}{C} = R\frac{di}{dt} \tag{5.32}$$

que es una ecuación diferencial que puede resolverse aplicando el procedimiento descrito anteriormente:

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$
$$e^{at}\left[Ra + \frac{1}{C}\right] = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{RC}$$
$$i_p = 0$$
$$i = Ke^{-t/RC} + 0 = Ke^{-t/RC}$$

El análisis físico del circuito muestra que el valor inicial de i, justo después de cerrar el interruptor, debe ser:

$$i(0) = \frac{v_{co}}{R} = \frac{q_o}{CR} \tag{5.33}$$

Así pues, como el valor de K debe ser i(0), la solución será:

$$i = \frac{q_o}{RC}e^{-t/RC} \tag{5.34}$$

que muestra que la corriente disminuye exponencialmente con una constante de tiempo RC. La tensión en terminales del condensador puede calcularse sustituyendo 5.34 en 5.31. Operando resulta:

$$v_c = \frac{q_o}{C}e^{-t/RC} \tag{5.35}$$

que demuestra que esta tensión también se extingue de forma exponencial desde su valor inicial q_o/C.

Ejemplo 5.4

En el circuito de la figura 5.13a el interruptor se cierra en t = 0. Hallar la tensión en bornes del condensador a partir del instante en que se cierra el interruptor. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir desde que se cierra el interruptor para que la tensión alcance el régimen permanente si el valor de C es de 1 μF?

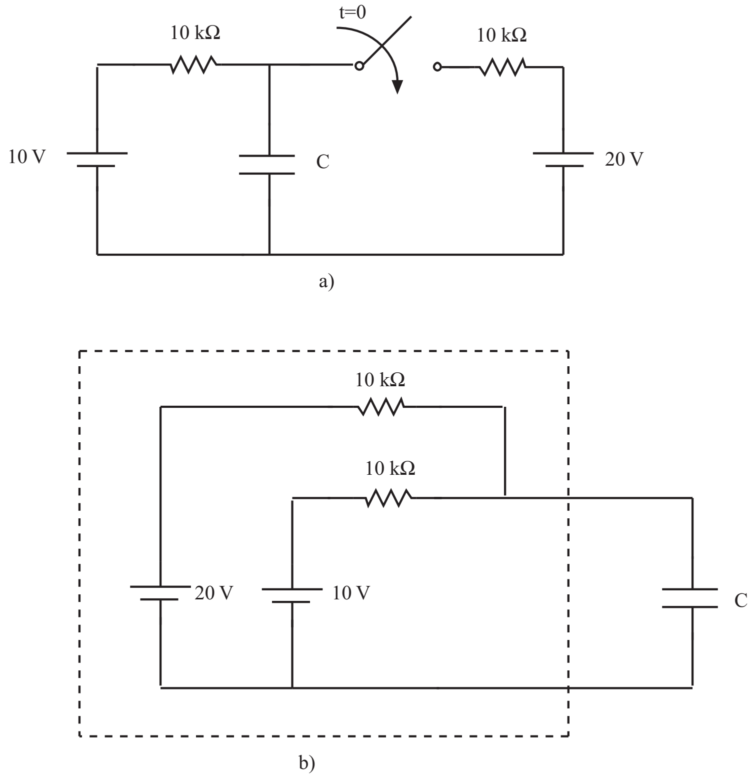

Fig. 5.13 a) Circuito del ejemplo 5.4. b) Circuito cuando el interruptor está cerrado

Con el interruptor abierto, la tensión en bornes del condensador es de 10 V, dado que la fuente de 10 V ha cargado el condensador. Por tanto su carga será de 10·C culombios.

Cuando el interruptor se cierra, se puede volver a dibujar el circuito de la forma indicada en la figura 5.13b. Entonces la parte de circuito recuadrada puede sustituirse por su equivalente Thévenin, lo que conduce a un circuito del tipo de la figura 5.9, pero en el que el valor de la batería es de 15 V y el de la resistencia 5 kΩ. La solución de este circuito, teniendo en cuenta que su carga inicial es q(0) = 10·C, es:

$$v_c(t) = 15 - 5e^{-t/\tau}$$

donde $\tau = RC = 1\mu F.5k\Omega = 5ms$. Observar que la tensión evoluciona desde un valor inicial de 10 V hasta un valor final de 15 V.

El valor final de 15 V será prácticamente alcanzado después de unas tres constantes de tiempo, es decir, después de unos 15 ms.

Ejercicio 5.5

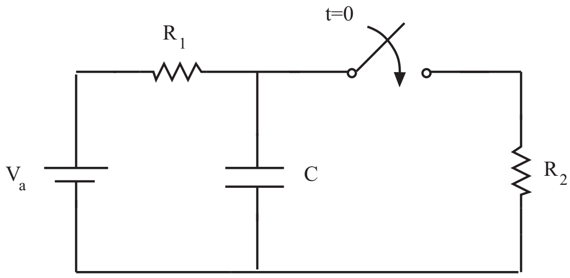

Fig. 5.14 Circuito del ejercicio 5.5

Calcular $v_c(t)$ en el circuito de la figura 5.14, en el que el interruptor se cierra en t = 0.

Solución:

Con el interruptor abierto, el condensador está cargado a la tensión V_a. *Una vez cerrado el interruptor, la evolución de* v_c *viene dada por:*

$$v_c(t) = \frac{V_a}{R_1 + R_2}(R_2 + R_1 e^{-t/C.R_e})$$

donde R_e *es el equivalente paralelo de* R_1 *y* R_2.

Ejemplo 5.5

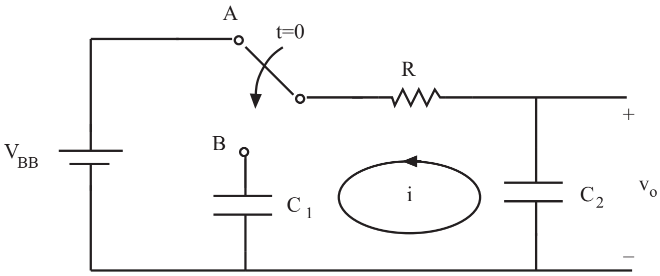

Fig. 5.15 Circuito del ejemplo 5.5

En el circuito de la figura 5.15 el interruptor conmuta a la posición B en t = 0. Hallar las expresiones de v_{c1} y de v_{c2} en función del tiempo.

Con el interruptor en la posición A el condensador C_2 *está cargado a la tensión* V_{BB}. *Así pues, en t = 0, justo antes de la conmutación:*

$$v_o(0) = v_{C2}(0) = V_{BB} \Rightarrow q_2(0) = C_2 V_{BB}$$

En t = 0 se produce la conmutación. A partir de este instante el circuito es el formado por los elementos C_1, *R y* C_2. *Como* C_1 *se supone descargado, la tensión entre sus terminales será nula, por lo que toda la tensión entre los terminales de* C_2, $q_2(0)/C_2$, *se aplica a R. Por tanto, la corriente que circulará en el instante inicial será:*

$$i(0) = \frac{v_o(0)}{R} = \frac{V_{BB}}{R}$$

Esta corriente proviene de las cargas almacenadas en C_2, *por lo que descargará a este condensador, y en consecuencia disminuirá la tensión entre sus bornes. Pero, por otra parte, esta corriente carga a* C_1, *haciendo aumentar la tensión entre terminales de este condensador. Ambos efectos, la disminución de* v_{c2} *y el aumento de* v_{c1}, *provocan que la caída de tensión en R disminuya a partir de su valor inicial, por lo que disminuirá la corriente i. Se llegará a una situación estable cuando la caída de tensión en R sea nula, es decir, cuando las tensiones en los dos condensadores sean iguales. Entonces la corriente i será nula, las cargas no se redistribuirán más, y las tensiones serán invariables.*

El tratamiento matemático de este comportamiento es el siguiente:

$$v_{c2} = iR + v_{c1}$$

$$v_{c2} = \frac{q_2(0) - \int_0^t i.d\tau}{C_2}$$

$$v_{c1} = \frac{0 + \int_0^t i.d\tau}{C_1}$$

Sustituyendo v_{c1} *y* v_{c2} *en la primera ecuación, y derivando ambos miembros respecto al tiempo obtenemos:*

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C_e} = 0$$

donde C_e *es la capacidad equivalente de* C_1 *y* C_2 *en serie.*

La resolución de esta ecuación, teniendo en cuenta la condición inicial antes comentada, conduce a:

$$i = \frac{V_{BB}}{R} e^{-t/RC_e}$$

Las tensiones en bornes de los condensadores pueden hallarse integrando esta expresión de acuerdo con las expresiones de v_{c1} *y* v_{c2} *antes escritas, con lo que se llega a:*

$$v_o(t) = v_{c2}(t) = V_{BB}\left[1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}(1 - e^{-t/RC_e})\right]$$

$$v_{c1}(t) = V_{BB}\frac{C_2}{C_1 + C_2}(1 - e^{-t/RC_e})$$

Obsérvese que ambas tensiones tienden al mismo valor final, tal como habíamos razonado anteriormente.

——— ♦ ———

El análisis de los resultados obtenidos en los procesos de carga y descarga de un condensador, permite extrapolar una expresión para obtener el resultado final sin resolver la ecuación diferencial. Si denominamos v_i al valor inicial de la tensión en bornes del condensador y v_f al valor final de esta tensión:

$$v_c = v_f + (v_i - v_f)e^{-t/\tau} \tag{5.36}$$

donde τ es la constante de tiempo del circuito y viene dada por el producto de C por la resistencia "vista" por el condensador. Obsérvese que en 5.36 el valor de v_c para t = 0 es v_i, y el valor para t mucho mayor que la constante de tiempo tiende a v_f. Para aplicar esta expresión basta conocer v_i, v_f y τ

mediante "inspección física" del circuito. En particular, el valor de v_f puede obtenerse sustituyendo el condensador por un circuito abierto, puesto que en régimen permanente éste es su estado. Así, por ejemplo, en el caso de descarga del condensador sabemos que el valor inicial es q_o/C, el valor final 0, y la constante de tiempo RC. Sustituyendo estos valores en la expresión 5.36 obtenemos 5.35. De forma similar se podría obtener la expresión 5.26 relativa a la carga de un condensador a partir del valor inicial, $v_c(0) = 0$, y del valor final, $v_c(\infty) = V_a$, conocidos por simple inspección del circuito.

Ejemplo 5.6

Resolver el ejemplo 5.4 aplicando la expresión 5.36.

El valor inicial de v_c será de 10 V, tal como fue justificado en el ejemplo 5.4.

El valor final de v_c será la tensión del generador equivalente de Thévenin cuyo valor es de 15 V.

La constante de tiempo del circuito será el producto de la capacidad por la resistencia que "ve" , que no es otra que la del equivalente Thévenin (R_1 y R_2 en paralelo). Por tanto, sustituyendo estas constantes en 5.36 se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 5.4.

Ejercicio 5.6

Resolver el ejercicio 5.5 aplicando la expresión 5.36.

Solución: Los valores v_i, v_f, y τ de la expresión 5.36 son:

$v_i=V_a$ $\quad$ $v_f=V_a.R_2/(R_1+R_2)$ $\quad$ $\tau=C[R_1R_2/(R_1+R_2)]$

5.2.2 Respuesta de circuitos RC a excitaciones sinusoidales

La respuesta de los circuitos electrónicos a las señales sinusoidales constituye una parte muy importante de la ingeniería electrónica pero sobrepasa los objetivos de este texto. En este apartado nos limitaremos a introducir algunos conceptos generales sobre este tema, resolviendo la ecuación diferencial de un circuito RC excitado por una señal sinusoidal, ya que algunos conceptos sobre amplificadores, que se verán en capítulos posteriores, lo requieren.

Consideremos el circuito de la figura 5.16. Suponemos el condensador inicialmente descargado.

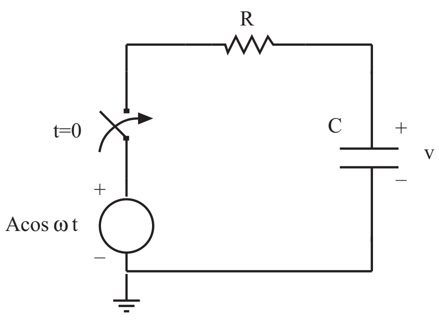

Fig. 5.16 Circuito RC con excitación sinusoidal

La ecuación de este circuito es, para $t \geq 0$:

$$A\cos(\omega t) = Ri + v_c$$

que, combinada con 5.2, conduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = A\cos(\omega t) \qquad (5.37)$$

que es similar a las anteriores, con la diferencia de que el término independiente es una sinusoide de pulsación ω radianes por segundo en lugar de ser una constante. El procedimiento de resolución consta de los mismos pasos expuestos en 5.2.1:

1 y 2: La ecuación homogénea es la misma que 5.13.

3: Para hallar la solución particular se ensaya:

$$v_c = a\,\text{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t) \tag{5.38}$$

Sustituyendo esta expresión y su derivada en 5.37 resulta:

$$(b + a\omega RC)\cos(\omega t) + (a - b\omega RC)\,\text{sen}(\omega t) = A\cos(\omega t) \tag{5.39}$$

Para que se cumpla esta ecuación para cualquier valor de t se requiere que los coeficientes de las funciones seno y coseno a ambos lados de la igualdad sean idénticos:

$$b + a\omega RC = A$$
$$a - b\omega RC = 0$$

y se hallan a y b resolviendo este sistema de ecuaciones, con lo que se obtiene:

$$v_{cp} = \frac{A}{1+(\omega RC)^2}\left[\cos(\omega t) + \omega RC\,\text{sen}(\omega t)\right] \tag{5.40}$$

expresión que también puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_{cp} &= \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t - \varphi) \\ \varphi &= \text{arctg}(\omega RC) \end{aligned} \tag{5.41}$$

que muestra que la solución particular también es una sinusoide en la que su amplitud y desfase dependen de la frecuencia de la excitación y del producto RC.

4: Usando 5.40 como solución particular, la solución matemática de la ecuación 5.37 es:

$$v_c = v_{ch} + v_{cp} = Ke^{-t/RC} + \frac{A}{1+(\omega RC)^2}\left[\cos(\omega t) + \omega RC\,\text{sen}(\omega t)\right] \tag{5.42}$$

5: La solución física se obtendrá haciendo que el valor matemático para t = 0 coincida con el que debe tener físicamente el circuito. En este caso, suponíamos el condensador inicialmente descargado por lo que debe cumplirse que $v_c(0) = 0$, con lo que se encuentra que:

$$v_c = -\frac{A}{1+(\omega RC)^2}e^{-t/RC} + \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t - \varphi) \tag{5.43}$$

Esta expresión se representa gráficamente en la figura 5.17. El primer término es la solución de la ecuación homogénea. Como esta solución no depende de la excitación sinusoidal (generadores inde-

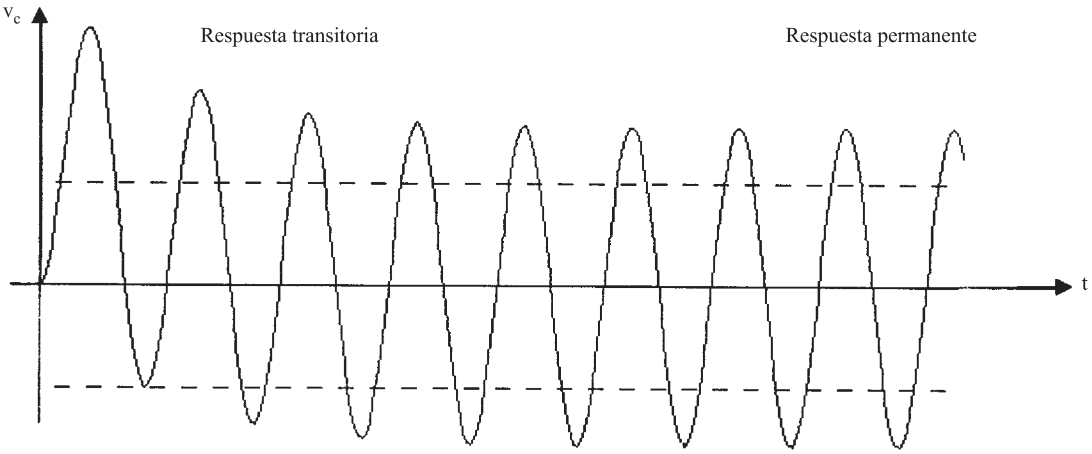

Fig. 5.17 Respuesta a la excitación sinusoidal del circuito de la figura 5.16

pendientes) se la suele denominar *respuesta natural* del circuito. El segundo término depende tanto del circuito como de la excitación y se le denomina *respuesta forzada*. Obsérvese que la respuesta natural se extingue después de unas pocas constantes de tiempo y queda solamente la respuesta forzada. Esta última es una señal periódica que se mantiene indefinidamente en el tiempo mientras dure la excitación. Por esta razón se la suele denominar *régimen permanente sinusoidal*.

Aunque se ha resuelto la ecuación diferencial 5.37 usando sinusoides, matemáticamente resulta mucho más simple resolverla usando exponenciales complejas, puesto que la fórmula de Euler (1.21) permite expresar un coseno como la parte real de la exponencial compleja de su argumento. Por esto, en lugar de resolver 5.37, se resuelve:

$$RC\frac{d\vec{v}_c}{dt} + \vec{v}_c = Ae^{j\omega t} \tag{5.44}$$

En este caso $\vec{v}_c$ será, a diferencia de 5.37, una magnitud compleja, cuya parte real será la respuesta a la excitación Acosωt, mientras que su parte imaginaria lo sería a Asenωt. La solución de la ecuación 5.44 se halla igual que la de 5.37, pero la solución particular será ahora del tipo:

$$\vec{v}_c = \vec{B}e^{j\omega t} \tag{5.45}$$

que, sustituida en 5.44, conduce a:

$$\vec{B} = \frac{A}{1 + j\omega RC} \tag{5.46}$$

Ignorando el régimen transitorio, que tiene poco interés en la respuesta de circuitos a excitaciones sinusoidales, resulta que la solución del régimen permanente sinusoidal es:

$$\vec{v}_c = \frac{A}{1 + j\omega RC}e^{j\omega t} \tag{5.47}$$

El factor que multiplica a la exponencial puede expresarse en forma polar como:

$$\vec{v}_c = \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} e^{-j\varphi} e^{j\omega t} \tag{5.48}$$

donde el ángulo φ es:

$$\varphi = \text{arctg}(\omega RC)$$

La parte real de esta solución, haciendo uso de la fórmula de Euler, es:

$$\text{Re}[\vec{v}_c] = \frac{A}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \tag{5.49}$$

que coincide con la solución hallada por el método anterior.

Ejercicio 5.7

En el circuito de la figura 5.16 la resistencia es de 5 kΩ y la capacidad de 20 nF. ¿Para qué valor de ω el desfase de la salida respecto a la entrada será de: a) π/4 radianes (45º) y b) π/3 radianes (60º)?

Solución:

$$\varphi = \pi/4 \Rightarrow \omega RC = \text{tg}\left[\frac{\pi}{4}\right] = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC} = 10^4\, rad/s$$

$$\varphi = \pi/3 \Rightarrow \omega RC = \text{tg}\left[\frac{\pi}{3}\right] = \sqrt{3} \Rightarrow \omega = \sqrt{3}.10^4\, rad/s$$

Ejemplo 5.7

El circuito de la figura 5.18 representa una situación que será encontrada en el estudio de los amplificadores: la combinación de una excitación continua I_o y una sinusoidal Acos(ωt) sobre un circuito formado por una resistencia en paralelo con un condensador. Se pide calcular la tensión $v_c(t)$.

Suponemos el condensador inicialmente descargado. Una vez cerrado el interruptor, y usando la técnica de exponenciales complejas, la ecuación del circuito es:

$$C\frac{d\vec{v}_c}{dt} + \frac{\vec{v}_c}{R} = I_0 + Ae^{j\omega t}$$

Al igual que en los casos anteriores, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$\vec{v}_c = Ke^{-t/RC}$$

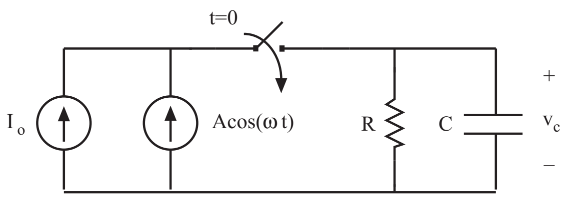

Fig. 5.18 Circuito del ejemplo 5.7

que es la respuesta natural del circuito. Para hallar una solución particular se ensaya:

$$\vec{v}_c = B_1 + B_2 e^{j\omega t}$$

sustituyendo esta expresión y su derivada en la ecuación diferencial, e identificando coeficientes de la función exponencial y de la constante en los dos miembros de la igualdad, resulta:

$$\vec{v}_c = I_0 R + \frac{R}{1 + j\omega RC} A e^{j\omega t}$$

Ignorando la respuesta natural (solución de la ecuación homogénea), la última expresión proporciona el régimen permanente sinusoidal del circuito, sin más que tomar la parte real:

$$\mathrm{Re}\left[\vec{v}_c\right] = I_0 R + \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} A \cos(\omega t - \varphi)$$
$$\varphi = \mathrm{arctg}(\omega RC)$$

solución que consiste en un término constante, $I_o \cdot R$, al que se le superpone una sinusoide. Hay dos aspectos de este resultado que se deben destacar de una forma especial. El primero es que la amplitud y el desfase de la sinusoide dependen de la frecuencia de la señal. Por esta razón la respuesta de un circuito a una señal sinusoidal depende de la frecuencia. Esta dependencia se suele representar gráficamente. El segundo aspecto a señalar es que si la frecuencia angular ω es suficientemente elevada, la sinusoide de la expresión anterior se puede aproximar por:

$$\frac{A}{\omega C} \cos(\omega t - \pi / 2)$$

cuya amplitud será muy pequeña y podrá despreciarse frente al término constante (figura 5.19). Entonces puede aproximarse el condensador como si fuera una fuente de tensión continua de valor $I_o \cdot R$.

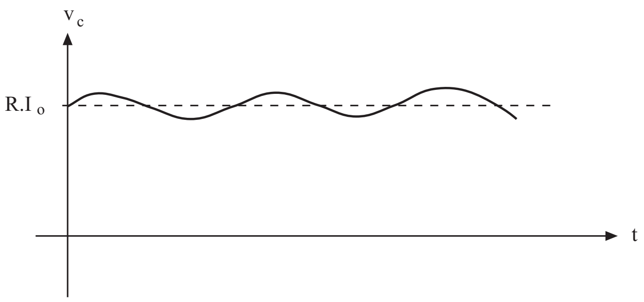

Fig. 5.19 Respuesta del circuito 5.18

———— ♦ ————

En un estudio más avanzado de este tema se verá un nuevo concepto denominado *impedancia*. En régimen permanente sinusoidal la impedancia, que se suele representar por el símbolo Z, viene dada por el cociente entre la tensión en terminales del dispositivo y la corriente que circula por él, expresadas ambas en forma de exponenciales complejas.

Si se aplica a un condensador una tensión:

$$\vec{v}_c = \vec{V}_c e^{j\omega t} = A e^{j\omega t}$$

la corriente que circulará por él será, de acuerdo con 5.2:

$$\vec{i}_c = C\frac{d\vec{v}_c}{dt} = j\omega CAe^{j\omega t} = \vec{I}_c e^{j\omega t}$$

por lo que la impedancia del condensador vendrá dada por:

$$Z_c = \frac{\vec{V}_c}{\vec{I}_c} = \frac{1}{j\omega C} \tag{5.50}$$

magnitud compleja que puede expresarse en forma polar:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C}e^{j\pi/2} \tag{5.51}$$

Nótese que el término 1/ωC tiene dimensión de ohmios, por lo que la impedancia viene a ser una generalización del concepto de resistencia. Pero también contiene el término exponencial complejo que implica un desfase:

$$\vec{i}_c = \frac{\vec{V}_c}{Z_c}e^{j\omega t} = \frac{A.e^{j\omega t}}{(1/\omega C).e^{-j\pi/2}} = \omega CA.e^{j(\omega t+\pi/2)} \tag{5.52}$$

Esta expresión pone de manifiesto que la sinusoide que representa la corriente va adelantada un ángulo de 90 grados respecto a la que representa la tensión en bornes del condensador.

5.3 La bobina

La bobina es un componente electrónico en el cual la relación entre la tensión en sus terminales y la corriente que circula por ella también sigue una ley diferencial. La expresión matemática de esta ley guarda una relación dual con la del condensador: se puede obtener una a partir de la otra sin más que cambiar corriente por tensión y capacidad por autoinducción. Por esta razón el tratamiento matemático de ambos elementos es muy similar.

5.3.1 La bobina ideal

La *bobina ideal*, también llamada inductor ideal, es un elemento de circuito que tiene la propiedad de almacenar energía mediante la creación de un campo magnético, cuando circula una corriente a través de ella. A consecuencia de ello, la relación entre la corriente que la atraviesa y la caída de tensión entre sus terminales viene dada por:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{5.53}$$

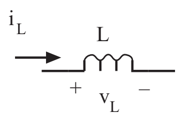

Fig. 5.20 Símbolo de la bobina ideal y signos de v_L e i_L

La constante de proporcionalidad L se denomina coeficiente de autoinducción de la bobina, y su unidad es el *henrio (H)*. De acuerdo con 5.53, 1 henrio = 1 voltio x 1 segundo / 1 amperio

es decir, un henrio es el coeficiente de autoinducción de una bobina que presenta entre sus terminales una caída de tensión de un voltio cuando la corriente que la atraviesa varía a razón de un amperio cada segundo. En la figura 5.20 se dan el símbolo de la bobina y los sentidos de i_L y de v_L.

Ejemplo 5.8

Calcular la caída de tensión que habría entre los terminales de una bobina ideal de 2 mH si la intensidad que la atraviesa fuera la señal triangular representada en la figura 5.21a.

En cada una de las rampas que forman la señal triangular, la corriente viene expresada por la ecuación de una recta. La derivada de la corriente será la pendiente de dicha recta. Para las rampas positivas la pendiente es 3 mA/3 ms , es decir , 1 A/s. En estas rampas la tensión en bornes de la bobina será el producto de esta pendiente por L, es decir, 2 mV. Para las rampas negativas la pendiente, y por tanto v_L*, toman los mismos valores pero con signo contrario. La forma de onda que toma* v_L *se representa en la figura 5.21b.*

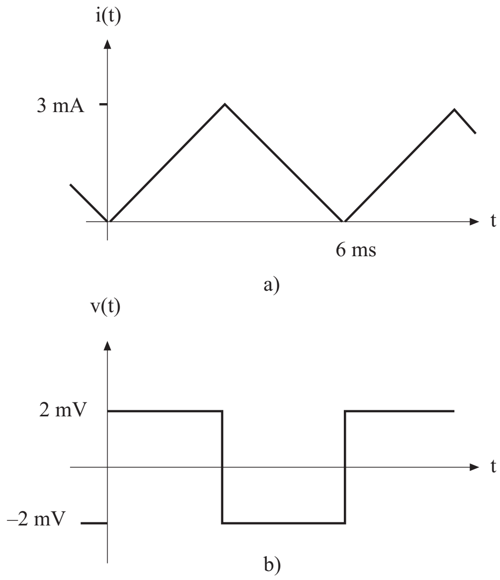

Fig. 5.21 a) Forma de onda de la corriente del ejemplo 5.8. b) Tensión en bornes de la bobina

Ejercicio 5.8

Calcular la caída de tensión en una bobina de 3 mH, sabiendo que la intensidad viene dada por:

$$i = 3e^{-t/10^{-3}}$$

Solución:

$$v_L = -9e^{-t/10^{-3}} voltios$$

——— ♦ ———

La expresión 5.53 pone de manifiesto dos propiedades muy importantes de la bobina:

— *La corriente en una bobina no puede variar de forma discontinua*. En efecto, si lo hiciera su derivada sería infinita, por lo que la tensión que se generaría entre sus terminales también lo sería, lo cual no ocurre en el mundo real.
— *Cuando* la corriente i_L tiene un valor *constante*, *la bobina equivale a un cortocircuito,* puesto que la caída de tensión en ella es nula.

Existe un símil hidráulico de la bobina que ilustra estas propiedades. En este símil, la bobina equivale a las palas de una turbina que poseen una determinada inercia. Se supone que las palas están situadas en el interior de la tubería del circuito hidráulico y que no se extrae energía de la turbina. Supongamos inicialmente que las palas están en reposo y que no hay corriente hidráulica; es decir, que el líquido está en reposo. Cuando una bomba intente mover el líquido para producir una corriente, ésta sólo podrá circular poniendo en movimiento las palas de la turbina. Como éstas tienen inercia, su velocidad se incrementará de forma continua a partir de cero, haciendo que la corriente también aumente de forma continua a partir de cero. Cuando se alcance un régimen estacionario, las palas no opondrán resistencia a la corriente (situación equivalente al cortocircuito de la bobina en continua). Si se intenta cortar la corriente hidráulica, las palas de la turbina producirán una corriente debido a su inercia, manteniendo la continuidad de la velocidad de su movimiento y por tanto de la corriente que la atraviesa.

Puede obtenerse una expresión alternativa a 5.53 integrándola entre 0 y t:

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{\int_0^t v_L(\tau).d\tau}{L} \tag{5.54}$$

En esta expresión $i_L(0)$ es la corriente que circula por la bobina en el instante inicial. *Obsérvese que una bobina con una corriente inicial puede modelarse mediante una fuente de intensidad constante, de valor $i_L(0)$, en paralelo con una bobina desactivada en el instante inicial.*

5.3.2 Principio físico de funcionamiento

El fundamento físico de este comportamiento tiene su origen en las fuerzas que ejercen entre sí las cargas eléctricas en movimiento. Además de la fuerza estática de Coulomb, dos cargas eléctricas en movimiento experimentan otra fuerza de origen "magnético". De forma similar a lo que se hacía para describir la fuerza electrostática, se puede imaginar que una carga en movimiento modifica el espacio que la rodea, creando un *campo magnético B.* Este campo magnético ejerce una fuerza F_m sobre otra carga eléctrica q que penetre en esta región del espacio con una velocidad v:

$$\vec{F}_m = q.\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{5.55}$$

Como una corriente eléctrica es un conjunto de cargas en movimiento, creará un campo magnético a su alrededor. Este campo magnético es proporcional al valor de la intensidad de la corriente.

Se define el flujo magnético de un campo B en una superficie perpendicular A como el producto:

$$\phi = B.A \tag{5.56}$$

Un alambre en forma de espira abierta de área A "abraza" un flujo magnético, ϕ, dado por 5.56. Faraday estableció que si el flujo magnético que abrazaba esta espira variaba con el tiempo, aparecía una diferencia de potencial entre sus extremos de valor:

$$v_\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \tag{5.57}$$

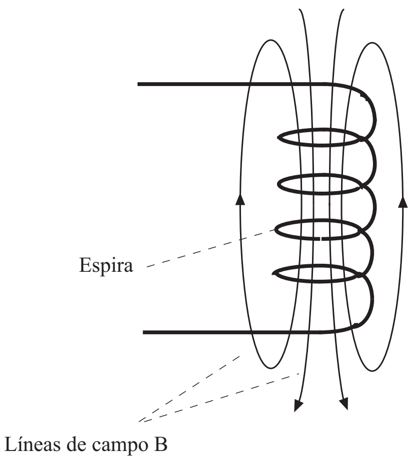

Fig. 5.22 Bobina en la que se indican las líneas de campo magnético

Una bobina está formada por un alambre "enrollado" sobre un núcleo formando N espiras en serie (figura 5.22). La corriente que circula por un hilo crea un campo magnético. Dentro del arrollamiento existe, pues, un campo B que es proporcional a la corriente y al número de espiras, debido a la adición de los campos magnéticos creados por cada espira. Suponiendo que este campo es perpendicular a las espiras, el flujo en cada una de ellas viene dado por el producto del campo por el área de la espira. Si este flujo varía con el tiempo, creará una diferencia de tensión v_ε en cada espira, con lo que se obtiene una diferencia total de tensión v_L entre los terminales de la bobina igual a la suma de las tensiones en cada espira, ya que éstas están en serie. La variación del flujo en las espiras de la bobina se debe a la variación del campo magnético. Como que el campo magnético es proporcional a la corriente que atraviesa la bobina, resulta que v_L es proporcional a la variación de la corriente en la bobina:

$$v_L = N\frac{d\phi}{dt} = N\frac{d}{dt}(kNi) = kN^2\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

donde L es la constante $k.N^2$ que aparece en la expresión anterior. La constante de proporcionalidad k depende de la sección de la bobina S, de la longitud del circuito magnético l, y de la permeabilidad μ del material que constituye el núcleo sobre el que se enrolla la bobina:

$$k = \frac{\mu S}{l}$$

Se remite al lector a la consulta de textos básicos de electricidad y magnetismo para la profundización en estos conceptos.

5.3.3 Asociación de bobinas en serie y en paralelo

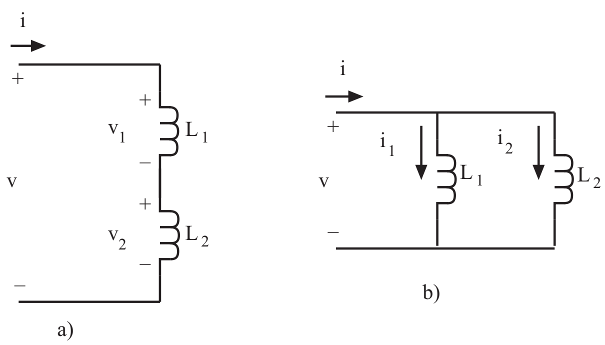

Fig. 5.23 Asociación de bobinas. a) En serie. b) En paralelo

En algunos casos las bobinas se pueden encontrar en un circuito conectadas en serie o en paralelo, en cuyo caso el conjunto de ellas puede ser sustituido por una bobina equivalente. En la figura 5.23a se presentan las bobinas L_1 y L_2 conectadas en serie y construidas de forma que el campo magnético creado por una no afecte a la otra. Suponiendo que la corriente inicial de cada una de las bobinas sea nula, es obvio que la caída de tensión del conjunto de ellas es:

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2)\frac{di}{dt}$$

por lo que equivalen a una bobina de valor suma de las dos:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \tag{5.58}$$

En la figura 5.23b se muestran las bobinas L_1 y L_2 conectadas en paralelo. En este caso, suponiendo también nulas las corrientes iniciales:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{1}{L_1}\int_0^t v.d\tau + \frac{1}{L_2}\int_0^t v.d\tau = \left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right]\int_0^t v.d\tau$$

por lo que para la bobina equivalente, L_{eq}, se cumplirá:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \tag{5.59}$$

Obsérvese que estas reglas de equivalencia son análogas a las que rigen para el caso de resistencias.

Las bobinas ideales aproximan dispositivos reales en un cierto margen de operación. Sus características y limitaciones son descritos en el apéndice A.

5.4 Análisis de circuitos RL

El análisis de circuitos RL es similar al realizado para circuitos RC. Esta similitud proviene del hecho de que las leyes que regulan el comportamiento de condensadores y de bobinas, las ecuaciones 5.2 y 5.53, son duales: se puede obtener una expresión a partir de la otra si se cambian i_c por v_L, v_c por i_L, y C por L. Por tanto, el tratamiento matemático de los circuitos RL es idéntico al de los circuitos RC, por lo que en este apartado pondremos el énfasis en el significado físico de los resultados obtenidos.

Considérese el circuito de la figura 5.24, en el que se pretende *activar una bobina* por la que no circulaba corriente antes de cerrar el interruptor. Al cerrar el interruptor el generador de tensión V_a "intentará" hacer circular una corriente por el circuito, pero, como se ha visto anteriormente, la bobina impide un cambio discontinuo de la corriente. Para evitar este cambio que intenta la fuente V_a, la bobina genera una tensión v_L del valor adecuado para asegurar la continuidad de la corriente. En este caso el valor "adecuado" de v_L es V_a. De esta forma la corriente que circula a través de R será nula, puesto que en sus extremos a y b (figura 5.24) hay la misma tensión.

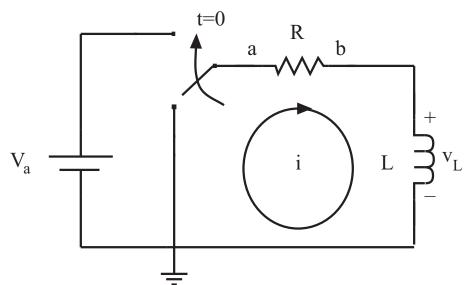

Fig. 5.24 Activación de una bobina a través de una resistencia

La expresión 5.53 implica que si v_L toma el valor V_a, la corriente presenta una derivada de valor v_L/L, por lo cual empieza a aumentar a partir de su valor nulo inicial. Pero la corriente sólo puede aumentar si disminuye la tensión en el terminal b de la resistencia, es decir, si disminuye v_L. Esta secuencia de acciones (continuidad y aumento de la corriente; disminución de v_L) se va sucediendo hasta que se llega a una situación final estable, caracterizada por una corriente constante y una v_L nula. Este valor nulo de la tensión en la bobina provoca que la corriente final en el circuito sea V_a/R. (Nótese que con excitación constante y una vez se alcanza el régimen permanente, la bobina equivale a un cortocircuito.)

Este comportamiento descrito cualitativamente puede cuantificarse resolviendo la ecuación diferencial del circuito. La ecuación de malla establece que:

$$V_a = iR + v_L \tag{5.60}$$

ecuación que combinada con 5.53 o 5.54 conduce a una ecuación diferencial en v_L o en i. Eligiendo, por ejemplo, la segunda alternativa, tenemos

$$\begin{aligned}
&L\frac{di}{dt} + Ri = V_a \\
&i_h = Ke^{-t.R/L} \\
&i_p = \frac{V_a}{R} \\
&i(0) = 0 \Rightarrow K = -\frac{V_a}{R}
\end{aligned}$$

y, por tanto, la solución es:

$$i = \frac{V_a}{R}(1 - e^{-t.R/L}) \tag{5.61}$$

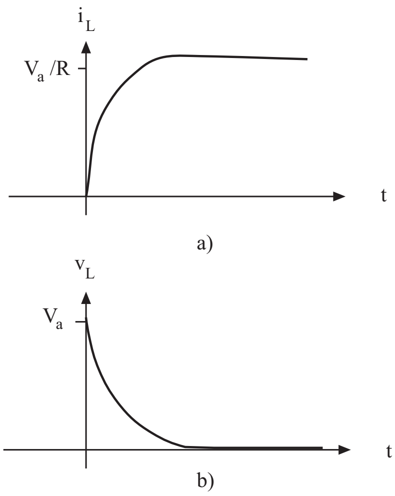

Fig. 5.25 Corriente y tensión en el circuito de la figura 5.24

Y aplicando 5.53, se halla la tensión v_L:

$$v_L = V_a e^{-t.R/L} \tag{5.62}$$

Las expresiones 5.61 y 5.62 se representan en la figura 5.25. Obsérvese que este comportamiento coincide con el descrito cualitativamente, y que la constante de tiempo del proceso de activación de la bobina es L/R.

A continuación estudiaremos el proceso inverso: la *desactivación de una bobina*. Consideremos la figura 5.26 que muestra un circuito que contiene una bobina que se supone inicialmente activada. Es decir, antes de cerrar el interruptor se supone que circula por la bobina una corriente i_o, la cual genera en la bobina un campo magnético que "almacena" la energía que posee dicho dispositivo. En t = 0 se acciona el conmutador conectando la bobina a una resistencia. Como se verá en las siguientes líneas, el campo magnético, y por tanto la corriente en la bobina, se extinguen de forma gradual. Por esto decimos que se desactiva la bobina. (Obsérvese en dicha figura que el sentido dado a la corriente de malla i es contrario al habitual a fin de mantener el signo que exige la continuidad de la corriente en la bobina).

El tratamiento matemático del circuito es simple. La ley de Kirchhoff de tensiones en la malla establece que:

$$v_L + iR = 0 \tag{5.63}$$

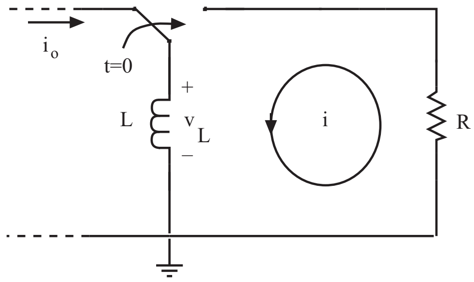

Fig. 5.26 Desactivación de una bobina a través de una resistencia

que combinada con 5.53 conduce a:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{5.64}$$

La condición física inicial de este circuito es:

$$i(0) = i_o \tag{5.65}$$

con lo que se obtiene como solución la expresión:

$$i(t) = i_o e^{-t.R/L} \tag{5.66}$$

que demuestra que la corriente inicial i_o se extingue de forma exponencial con una constante de tiempo L/R, y sin presentar cambios abruptos en su variación.

Derivando 5.66 puede obtenerse la tensión en bornes de la bobina:

$$v_L = -i_o \mathrm{Re}^{-t.R/L} \tag{5.67}$$

Nótese que la tensión en la bobina presenta una discontinuidad en t = 0. Antes de accionar el conmutador su valor era nulo. Una vez conmutado presenta un cambio abrupto a $v_L = -\mathrm{R}.i_o$ con el objetivo de forzar en R una corriente de valor i_o que asegure la continuidad de la corriente.

Ejemplo 5.9

En el circuito de la figura 5.27 el interruptor conmuta a la posición 2 después de haber permanecido en la posición 1 el tiempo suficiente como para haberse alcanzado el régimen permanente. Calcular el valor de v_r justo después de la conmutación.

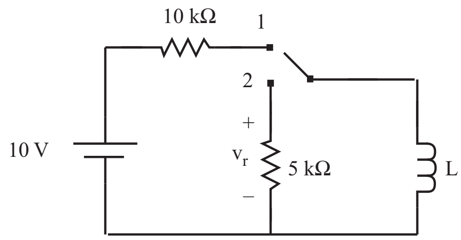

Fig. 5.27 Circuito del ejemplo 5.9

En la posición 1 la batería de 10 V activa a la bobina a través de la resistencia de 10 kΩ, con lo que se llega a un régimen permanente en el que la corriente es constante, por lo que la tensión en bornes de la bobina es nula (la bobina equivale a un cortocircuito). El valor de esta corriente, que circula por la bobina en el sentido de arriba hacia abajo, será, por tanto:

$$i = \frac{10V}{10k\Omega} = 1mA$$

Cuando el interruptor conmuta a la posición 2, debe haber continuidad de la corriente en la bobina. Por tanto, se generará una v_L tal que asegure dicha continuidad de corriente. Esta corriente inicial de 1 mA circulará a través de la resistencia de 5 kΩ en el sentido de abajo hacia arriba. Por tanto, la tensión v_r será:

$$v_r = -5k\Omega \cdot 1mA = -5V$$

Ejercicio 5.9

Calcular la corriente que circula por la bobina en el circuito de la figura 5.28 a partir de t = 0.

Solución:

$$i_L = \left[\frac{V_a}{R} + I_a\right] - I_a e^{-t.R/L}$$

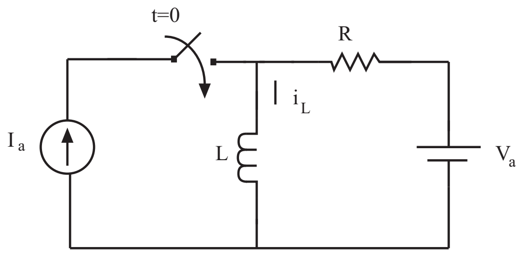

Fig. 5.28 Circuito del ejercicio 5.9

Las bobinas y condensadores también se pueden usar en circuitos que contengan amplificadores operacionales. Esta combinación de elementos permite realizar nuevas funciones electrónicas con señales, tales como la diferenciación y la integración. Una ilustración de estos circuitos se proporciona en el ejemplo y en el ejercicio que siguen.

Ejemplo 5.10

Demostrar que en el circuito de la figura 5. 29 se cumple la siguiente relación entre la salida y la entrada:

$$v_o = -\frac{L}{R}\frac{dv_g}{dt}$$

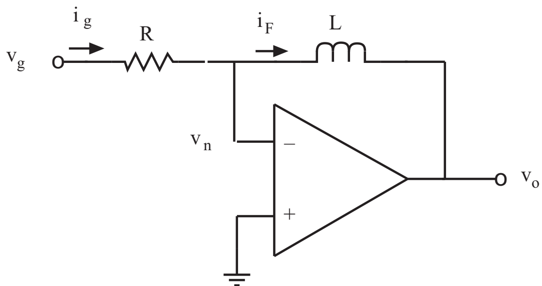

Fig. 5.29 Circuito diferenciador con bobina y A.O.

Observemos que la entrada no inversora del A.O. está a masa. Suponiendo que el amplificador operacional esté operando en la región lineal $v_n = 0$. Por tanto, resulta:

$$v_o = -v_L = -L\frac{di_F}{dt}$$

$$i_F = i_g = \frac{v_g}{R}$$

y sustituyendo la segunda expresión en la primera obtenemos la relación del enunciado.

Ejercicio 5.10

Demostrar que los circuitos de las figuras 5.30a y 5.30b son integradores.

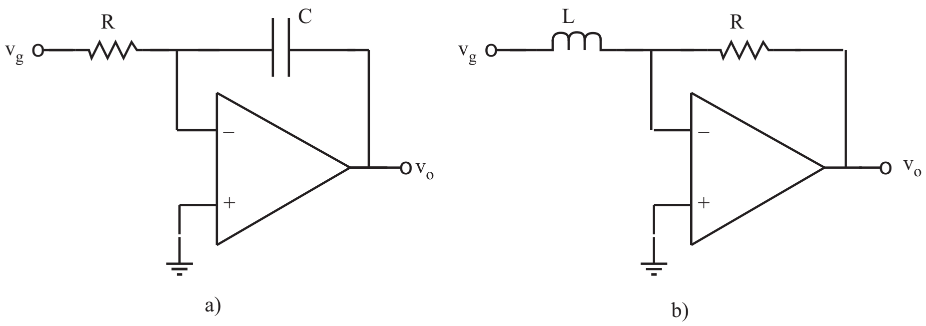

Fig. 5.30 Circuitos integradores. a) Con condensador. b) Con bobina

Solución:

$$v_o = -\frac{1}{RC}\int v_g.dt$$

$$v_o = -\frac{R}{L}\int v_g.dt$$

———— ♦ ————

Obviamente, una bobina también puede ser excitada con una señal sinusoidal. Aunque no estudiaremos esta situación en este momento, el tratamiento es similar al desarrollado para el condensador en el apartado 5.2.3. En régimen permanente sinusoidal, la impedancia de una bobina viene dada por:

$$Z_L = j\omega L \tag{5.68}$$

como puede verificarse calculando v_L mediante 5.53 y suponiendo una corriente dada por una exponencial de exponente $j\omega t$.

5.5 Linealidad y energía almacenada en condensadores y bobinas

Los condensadores y bobinas ideales, con condiciones iniciales nulas, son elementos lineales. Su linealidad proviene del carácter lineal del operador matemático de derivación. En efecto, se cumple:

$$\frac{d(k_1u_1 + k_2u_2)}{dt} = k_1 \frac{d(u_1)}{dt} + k_2 \frac{d(u_2)}{dt} \tag{5.69}$$

Esta propiedad de la derivada implica que las dependencias funcionales entre la tensión y la corriente dadas por 5.2 y 5.53 son lineales. Por tanto, los circuitos que además de fuentes independientes, fuentes dependientes lineales y resistencias ideales contengan condensadores y bobinas ideales serán lineales, y se les podrá aplicar las técnicas de análisis propias de los circuitos lineales (superposición, equivalentes de Thévenin y Norton,...). Esta propiedad no suele aplicarse en el análisis temporal llevado a cabo en este capítulo. Si se aplicara, la "resistencia" equivalente sería una expresión matemática complicada de derivadas e integrales en función del tiempo. Sin embargo, sí que se aplica con profusión cuando se resuelven los circuitos usando la transformada de Laplace, tema que escapa al contenido de este texto básico.

Cuando los condensadores y bobinas tienen condiciones iniciales no nulas deben considerarse a éstas como excitaciones independientes. En efecto, supongamos un condensador con una carga inicial q(0) y que estuviera excitado con unos generadores independientes de corriente i_1 e i_2. La expresión 5.6 establece:

$$v_c = \frac{q(0)}{C} + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1 + i_2).d\tau \tag{5.70}$$

en donde la presencia del primer término del segundo miembro rompe la linealidad de la expresión (si se aplicara superposición usando 5.6, el término q(0)/C se sumaría dos veces). Por el contrario, si se considera a q(0) como una excitación independiente, la expresión 5.70 muestra que v_c puede calcularse como la superposición de tres componentes: las producidas por i_1 e i_2 (suponiendo el condensador descargado) y la debida a la carga inicial q(0).

Los condensadores y bobinas ideales son elementos que almacenan energía. Para ilustrar este concepto, consideremos el circuito de la figura 5.31. En este circuito el conmutador pasa de la posición 0 a la posición 1 en t = 0. Permanece en esta posición durante un tiempo suficiente para que el condensador, que estaba inicialmente descargado, se cargue completamente. En este proceso de carga el condensador ha almacenado energía proviniente del generador V_G. Una vez cargado el condensador conmutamos a la posición 2. En esta posición el condensador se descarga sobre la resistencia R_L, la cual disipa en forma de calor la energía que le entrega el condensador. Se trata de calcular, en primer lugar, la energía que el condensador ha absorbido de V_G, y, después, la que el condensador ha entregado a R_L.

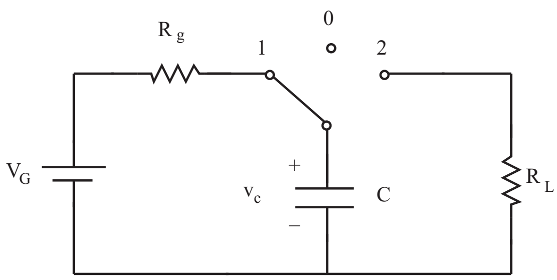

Fig. 5.31 Almacenamiento y posterior entrega de energía por el condensador

La energía absorbida por el condensador desde el generador será:

$$W_C = \int_0^\infty p.dt = \int_0^\infty i_c v_c.dt = \int_0^\infty (C\frac{dv_c}{dt})v_c.dt = \frac{1}{2}Cv_c^2\Big|_0^{V_G} = \frac{1}{2}CV_G^2 \quad (5.71)$$

puesto que $v_c(0)$ es nula por estar el condensador inicialmente descargado, y se supone que cuando el tiempo tiende a infinito la tensión en bornes del condensador es V_G.

En el proceso de descarga del condensador sobre R_L se usa la variable t' a fin de simplificar las expresiones matemáticas. Se supone que el condensador está inicialmente cargado a V_G y que en t' = 0 se inicia su descarga a través de R_L. La energía que disipa esta resistencia será:

$$W_R = \int_0^\infty i_R^2 R_L.dt' = \int_0^\infty \left[\frac{V_G}{R_L}e^{-t'/CR_L}\right]^2 R_L.dt' = \frac{1}{2}CV_G^2 \quad (5.72)$$

en donde se ha utilizado la expresión de la corriente de descarga de un condensador sobre una resistencia deducida en el apartado 5.2.1.

Comparando las expresiones 5.71 y 5.72 se observa que W_C es igual que W_R. Esto significa que toda la energía que ha absorbido el condensador del generador V_G la ha cedido a la resistencia R_L. El condensador, pues, *no disipa energía, sólo la almacena.* La energía que almacena un condensador cargado a una tensión V_o es:

$$W_C = \frac{1}{2}CV_o^2 \quad (5.73)$$

Un comportamiento similar se produce con la bobina ideal. La energía almacenada por una bobina por la que circula una corriente I_o viene dada por:

$$W_L = \frac{1}{2}LI_o^2 \quad (5.74)$$

Esta energía también puede ser entregada a un componente que se conecte a la bobina. En el proceso de intercambio de energía la bobina ideal no disipa potencia: toda la energía que absorbe la entrega. Nótese finalmente la relación dual en las expresiones 5.73 y 5.74.

Ejercicio 5.11

Considerar el circuito de la figura 5.31, sustituyendo el condensador por la bobina. Calcular la energía que una bobina ideal, inicialmente desactivada, absorbe de la fuente independiente de tensión V_G, y luego la energía que esta bobina entrega a una resistencia R_L.

Solución:

$$W_L = W_R = \frac{1}{2}L.\left[\frac{V_G}{R_g}\right]^2$$

5.6 El transformador

El transformador es un componente electrónico constituido por dos bobinas acopladas magnéticamente. Una de estas bobinas se denomina *primario* y se considera la entrada del transformador. La otra se denomina *secundario*. En este apartado se describirán las propiedades esenciales de este dispositivo.

5.6.1. El transformador ideal

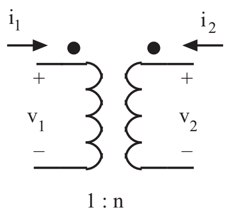

Fig. 5.32 Símbolo circuital del transformador ideal

El transformador ideal es un elemento de circuito cuyo símbolo se representa en la figura 5.32 y que presenta las siguientes propiedades:

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = n \qquad p_1(t) + p_2(t) = 0 \tag{5.75}$$

donde la constante n se denomina relación de transformación del transformador y la segunda relación establece que la potencia instantánea entregada es igual a la potencia instantánea recibida. Obsérvese que el transformador ideal sólo transmite potencia: ni la almacena ni la disipa. Los puntos señalados en la figura 5.32 indican los terminales del transformador que tienen la misma polaridad: si en el circuito 1 el terminal marcado con un punto es positivo respecto al otro, en el circuito 2 el terminal marcado con un punto también será positivo respecto al otro.

La segunda relación de la definición 5.75 permite establecer una relación entre las corrientes:

$$i_1.v_1 = -i_2.v_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{i_2}{i_1} = -\frac{1}{n} \tag{5.76}$$

5.6.2. El transformador real

La construcción física de un transformador se realiza mediante dos bobinas devanadas sobre un núcleo común que confina las líneas de campo magnético creadas por ellas. Si la primera bobina tiene N_1 espiras y la segunda N_2, la relación de transformación viene dada por:

$$n = \frac{N_2}{N_1} \tag{5.77}$$

Como se justificará más adelante, las relaciones 5.75 sólo son válidas para señales que varíen con el tiempo. *Estas relaciones no se cumplen para tensiones continuas.*

Ejemplo 5.11

¿Cuál es la relación de transformación n de un transformador que convierte una tensión alterna de 110 V eficaces en otra de 220 V eficaces?

De acuerdo con 5.75 :

$$n = \frac{v_2}{v_1} = \frac{220}{110} = 2$$

——— ♦ ———

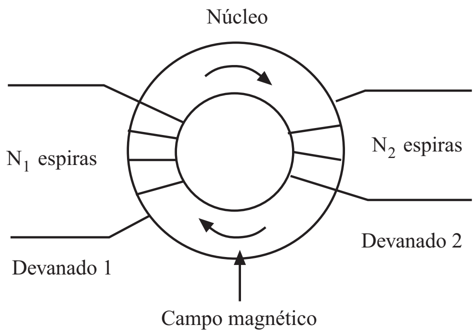

Fig. 5.33 Estructura física de un transformador

El fundamento físico del comportamiento de este componente es el siguiente. Supongamos que el devanado 2 está en circuito abierto, por lo que i_2 es nula. La corriente i_1 crea un campo magnético B_1 (proporcional al número de espiras del devanado 1) que es confinado en el interior del núcleo magnético sobre el que se realizan los dos devanados. El núcleo de un transformador, fabricado con un material y una forma determinados, tiene precisamente esta propiedad de confinamiento del campo magnético (idealmente, todas las "líneas" de campo están en el interior del núcleo y fuera de él no hay campo magnético). Este campo magnético es "abrazado" por las espiras del devanado 1 y del devanado 2, y genera, de acuerdo a la ley de Faraday, una tensión entre terminales de cada devanado proporcional a su número de espiras:

$$\begin{aligned} v_{11} &= k_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} \\ v_{21} &= k_2 N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \tag{5.78}$$

El coeficiente k_2 es $K.k_1$, donde K es el coeficiente de acoplamiento entre las dos bobinas y cuyo valor suele ser algo inferior a uno debido a las pérdidas de confinamiento del campo magnético. La constante k_1 tiene la misma expresión que en el caso del inductor ($\mu S/l$). La influencia de la corriente que circula por la bobina 1 sobre la 2 se denomina *inducción mutua* , y al coeficiente $k_2.N_1.N_2$ coeficiente de inducción mutua (normalmente designado con la letra M).

Supongamos ahora nula la corriente i_1. De forma similar a la anterior, una corriente i_2 que circule por el devanado 2 creará un campo magnético B_2 (proporcional a N_2), el cual originará unas tensiones entre terminales de los devanados 1 y 2 proporcionales al número de espiras respectivo:

$$\begin{aligned} v_{12} &= k_2 N_1 N_2 \frac{di_2}{dt} \\ v_{22} &= k_1 N_2^2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{5.79}$$

Cuando circulan ambas corrientes simultáneamente las tensiones generadas son la suma de las expresiones anteriores, debido a que los campos magnéticos B_1 y B_2 se suman. Por ello:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{11} + v_{12} = N_1 \left(k_1 N_1 \frac{di_1}{dt} + k_2 N_2 \frac{di_2}{dt}\right) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= v_{21} + v_{22} = N_2 \left(k_2 N_1 \frac{di_1}{dt} + k_1 N_2 \frac{di_2}{dt}\right) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{5.80}$$

Si K fuera igual a la unidad, la relación entre v_1 y v_2 en 5.80 porporciona directamente la expresión 5.75 debido a que las cantidades entre paréntesis son idénticas. Obsérvese que las relaciones 5.80

exigen que las corrientes varíen con el tiempo. Si fueran constantes, no habría variación de flujo magnético, y por tanto no se generarían las tensiones v_1 y v_2 a consecuencia de la ley de Faraday. Si en la primera de las expresiones 5.80 despejamos el término que contiene i_1 se obtiene:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{k_1 N_1^2} v_1 - K \frac{N_2}{N_1} \frac{di_2}{dt}$$
$$i_1(t) = \frac{1}{k_1 N_1^2} \int_0^t v_1(\tau).d\tau - K \frac{N_2}{N_1} i_2(t) \qquad (5.81)$$
$$i_1(t) = \frac{1}{L_1} \int_0^t v_1(\tau).d\tau - K \frac{N_2}{N_1} i_2(t)$$

Análogamente, despejando i_2 en la segunda de las ecuaciones:

$$i_2(t) = \frac{1}{L_2} \int_0^t v_2(\tau).d\tau - K \frac{N_1}{N_2} i_1(t) \qquad (5.82)$$

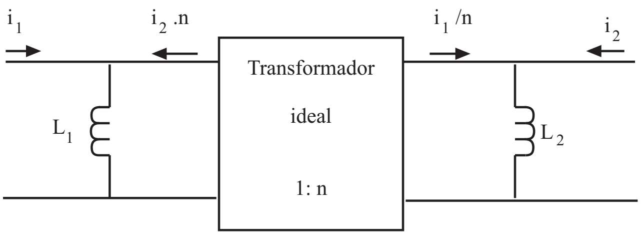

Fig. 5.34 Circuito equivalente de un transformador real sin pérdidas

Estas ecuaciones pueden representarse por el circuito equivalente de la figura 5.34, donde se ha supuesto K igual a la unidad, es decir, que todo el flujo está confinado en el núcleo y no hay pérdidas. Obsérvese que para que el transformador se comporte según el modelo ideal se requiere, además, que los primeros términos de los segundos miembros de 5.81 y 5.82 sean despreciables respecto a los segundos, en cuyo caso se cumplirá la ecuación 5.76. Si estos términos no son despreciables, las bobinas L_1 y L_2 almacenarán energía y la potencia instantánea entrante no será igual a la saliente. Sin embargo, como las bobinas no disipan energía, siempre se cumplirá que las potencias medias entrante y saliente coinciden. Obsérvese que para que estos primeros términos sean despreciables se requieren altos valores de L_1 y L_2, lo cual suele implicar altos valores de N_1 y N_2.

Si el número de espiras del secundario es superior a la del primario (N_2>N_1) resulta que n es mayor que la unidad, lo que provoca que v_2 sea mayor que v_1. Se dice en este caso que el transformador es *elevador* de tensión. En el caso contrario, el transformador es *reductor* de tensión.

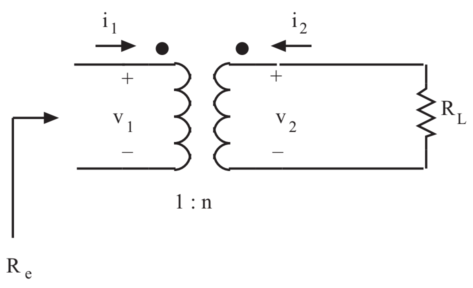

Fig. 5.35 El transformador como circuito adaptador de resistencias

Un uso muy importante del transformador en circuitos electrónicos es como *elemento de adaptación* entre una fuente y una carga para lograr la máxima transferencia de señal. Una carga R_L conectada en el secundario es vista desde el primario como una resistencia de valor R_L/n^2. Considérese la figura 5.35. La resistencia que se "verá" a la entrada del transformador será:

$$R_e = \frac{v_1}{i_1}$$

Pero usando las relaciones 5.75 y 5.76:

$$v_1 = \frac{v_2}{n}$$
$$i_1 = -ni_2$$

y por la ley de Ohm en R_L:

$$v_2 = -i_2 R_L$$

Por tanto, sustituyendo en la anterior expresión, resulta:

$$R_e = \frac{v_2}{n(-i_2 n)} = \frac{-i_2 R_L}{-i_2 n^2} = \frac{R_L}{n^2}$$

Ejemplo 5.12

La resistencia del circuito equivalente Thévenin de un amplificador es de 100 Ω. Se desea transferir la máxima potencia a un altavoz de 4 Ω. Calcular la relación de transformación n del transformador para que se transfiera la máxima potencia.

Para conseguir la máxima transferencia de potencia se requiere que la resistencia que "vea" el equivalente Thévenin sea igual a 100 Ω. Para ello, la resistencia vista desde el primario del transformador debe tener este valor. Por tanto:

$$\frac{R_L}{n^2} = \frac{4}{n^2} = 100$$
$$n = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = 0,2$$

Ejercicio 5.12

Encontrar el equivalente Thévenin del circuito de la figura 5.36. (Nota: en el cálculo de la tensión equivalente Thévenin, observar que la corriente en el secundario es nula, por lo que también debe serlo en el primario.)

Solución:

$$v_{th} = -nR_1 I_a$$
$$R_{th} = n^2 R_1$$

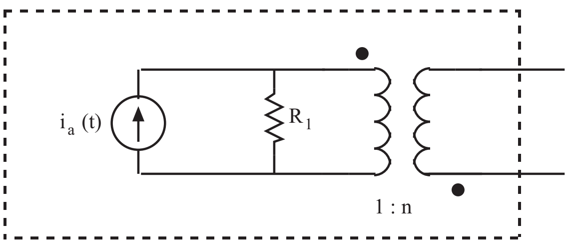

Fig. 5.36 Circuito del ejercicio 5.12

5.7 Análisis de circuitos con condensadores y bobinas usando SPICE

El objetivo fundamental de este apartado es familiarizar al lector con el análisis de transitorios con SPICE (.TRAN), y con la utilización de condiciones iniciales en circuitos con condensadores y bobinas.

Ejemplo 5.13

En el circuito de la figura el condensador está inicialmente cargado a 10 V ($v_c(t=0) = 10$ V). La fuente $V_i(t)$ genera pulsos de 10 V de amplitud, 5 ms de duración y de 10 ms de período. Hallar gráficamente mediante SPICE la tensión de salida, v(2), durante los primeros 60 ms.

El fichero de entrada de SPICE es el siguiente:

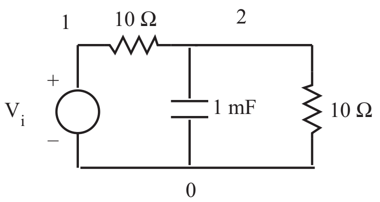

Fig. 5.37 Circuito del ejemplo 5.13

```
EJEMPLO TRANSITORIO 1
R1   1   2   10
R2   2   0   10
C1   2   0   1M   IC=10
VI 1 0 pulse(0   10   1U   1U   1U   5M   0.01)
.TRAN   1M   0.06   0   0   UIC
.PROBE
.END
```


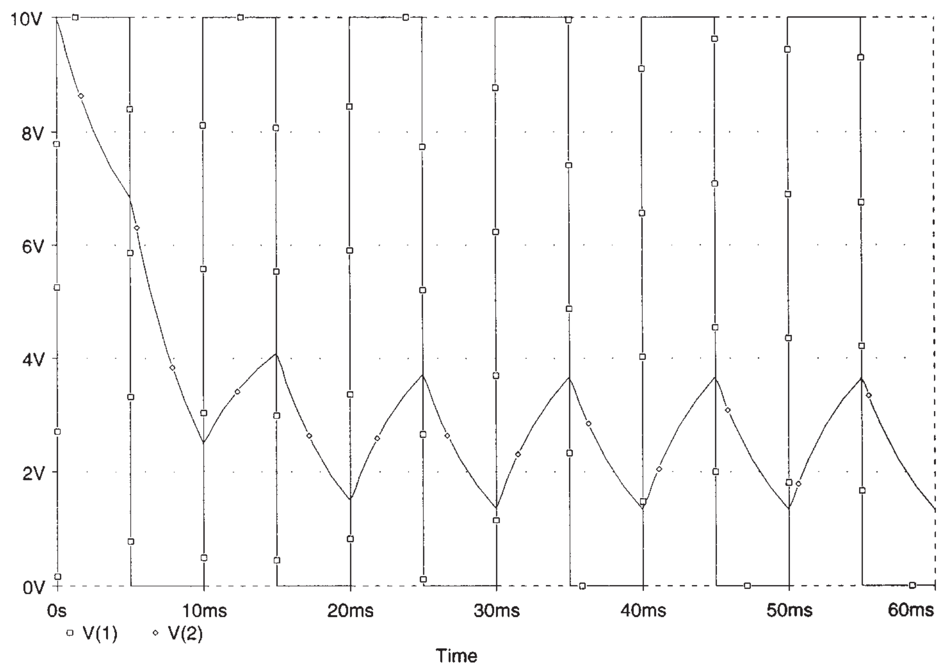

Fig. 5.38 Señales de entrada y de salida del circuito del ejemplo 5.13 obtenidas mediante el programa PROBE

Nótese que en la declaración de C1 se ha incluido la condición inicial de 10 V. Los resultados del análisis son tratados gráficamente por el programa PROBE, y se presentan en la figura 5.38. En dicha figura se presentan la señal de entrada, V(1), y la de salida V(2). Obsérvese que se alcanza el régimen permanente al cabo de unos 20 ms.

Ejercicio 5.13

Analizar, usando SPICE, el circuito de la figura 5.15.

Ejemplo 5.14

Repetir el ejemplo 5.13 sustituyendo el condensador por una bobina de 10 mH por la que circula en el instante inicial una corriente de 0,5 A en el sentido del nudo 2 al nudo 0.

El fichero de entrada de este circuito es idéntico al anterior sin más que sustituir la declaración del condensador C1 por la siguiente:

L1 2 0 10M IC=0.5

Las formas de onda de entrada y de salida se muestran en la figura 5.39.

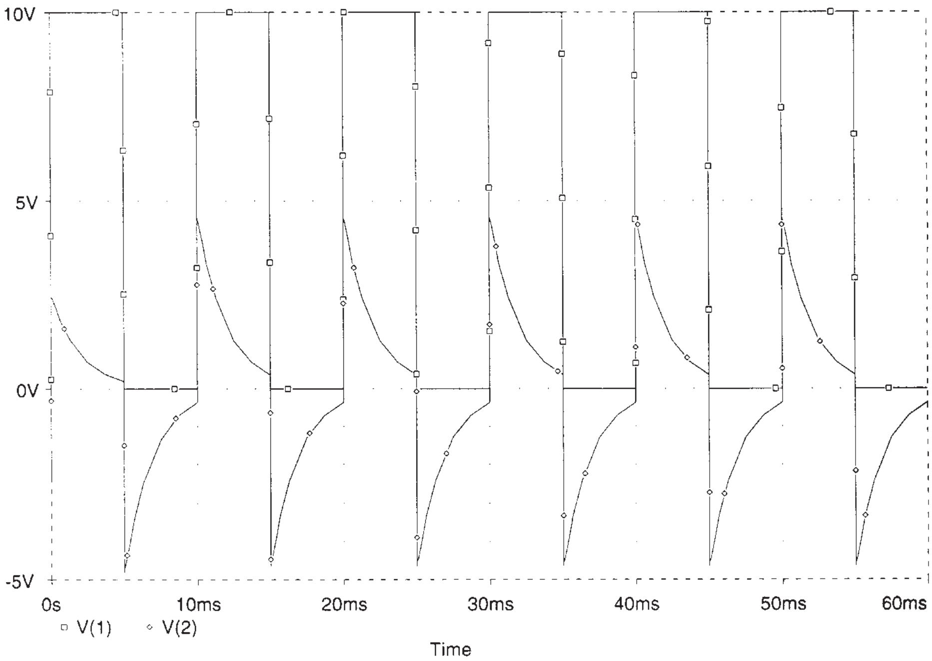

Fig. 5.39 Formas de onda de entrada y de salida del ejemplo 5.14

Ejercicio 5.14

Analizar mediante SPICE el circuito de la figura 5.27.

Cuestiones

C5.1 ¿Qué sucede si conectamos un condensador descargado a una fuente de corriente ideal constante? Dibuje la evolución de la tensión y de la corriente en el condensador. ¿Ocurre lo mismo si lo conectamos a una fuente de tensión ideal constante?

C5.2 Razónense las aproximaciones que pueden hacerse al asociar dos condensadores de valores muy dispares en serie y en paralelo.

C5.3 Sean dos condensadores C_1 y C_2 con cargas iniciales q_1 y q_2, respectivamente. Conteste las siguientes cuestiones, teniendo en cuenta que un condensador inicialmente cargado equivale a un condensador descargado en serie con una fuente de tensión cuyo valor es la tensión inicial de carga: a) Si se conectan ambos condensadores uno a continuación del otro sin cerrar el circuito, ¿cuáles serán la capacidad y la carga del condensador equivalente al conjunto serie así formado? b) ¿Qué relación ha de existir entre las cargas q_1 y q_2 para que se pueda conectar C_1 y C_2 en paralelo? c) ¿Cuáles serán la capacidad y la carga del condensador equivalente al montaje en paralelo de ambos condensadores?

C5.4 Un divisor de tensión capacitivo es un circuito formado por dos condensadores en serie al que se le aplica la tensión que se pretende dividir. Demuestre que la tensión resultante en cada uno de los condensadores es igual a la tensión aplicada al divisor multiplicada por la capacidad del otro condensador y dividida por la suma de las dos capacidades. Suponga que inicialmente los condensadores están descargados.

C5.5 Suponga que en el instante t = 0 une dos condensadores con igual capacidad C (previamente cargados con q_1 y q_2, respectivamente) colocando entre ellos una resistencia en serie R y de manera que se forme un circuito cerrado. ¿Cuál es la carga final del conjunto?

C5.6 Calcule la energía almacenada en los condensadores de la cuestión anterior C5.5, antes y después de unirlos. ¿Dónde se ha consumido la energía perdida?

C5.7 Sean dos condensadores C_1 y C_2, cuyas respectivas tensiones máximas de trabajo son V_{1m} y V_{2m}. Calcule la tensión máxima aplicable al conjunto de ambos condensadores en las dos situaciones siguientes: a) cuando están en paralelo, y b) cuando están en serie.

C5.8 Demuestre que las constantes de tiempo de los circuitos RC y RL tienen dimensiones de tiempo.

C5.9 ¿Puede aplicarse durante un tiempo indefinido una tensión constante V en bornes de una bobina? Razone la contestación.

C5.10 Sean dos bobinas L_1 y L_2 activadas respectivamente por generadores de corriente constante I_1 e I_2. a) ¿Existe alguna limitación que impida conectar dichas bobinas, previamente activadas, en serie? ¿Cuáles serían el coeficiente de autoinducción y la corriente activadora de la bobina equivalente a ambas en serie? Suponga que no existe acoplamiento mutuo. b) ¿Existe alguna limitación a la conexión en paralelo de dichas bobinas previamente activadas? ¿Cuáles serían el coeficiente de autoinducción y la corriente activadora correspondiente a la bobina equivalente al conjunto paralelo? Suponga que no existe acoplamiento mutuo.

C5.11 ¿Qué tensiones y corrientes tendrán los condensadores e inductores de las figuras si los generadores son fuentes constantes (invariables en el tiempo) y se supone régimen permanente o estacionario?

C5.12 Se conecta una fuente de tensión sinusoidal primero a una resistencia R, después a un condensador C y, por último, a una bobina L. Calcule y represente gráficamente, para cada uno de los componentes: a) la corriente i(t); b) la potencia instantánea p(t); c) la potencia media. Explique el comportamiento físico de cada componente, en función de los resultados.

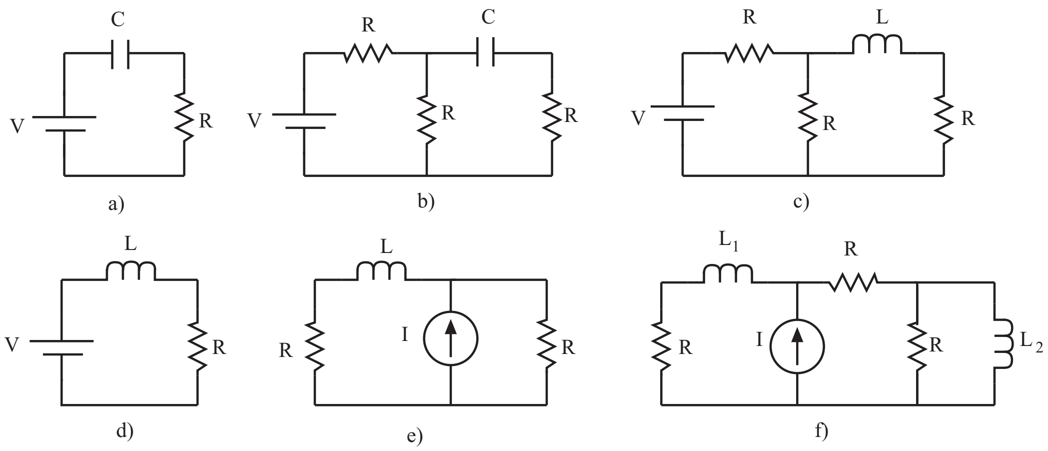

Fig. C5.11

C5.13 Sea un transformador ideal cuyo secundario está cargado por una resistencia R. Si aplicamos una tensión al primario, ¿qué parámetros del circuito determinan el valor de la corriente en ese devanado?

Problemas

P5.1 Se tiene un condensador de 1 μF de capacidad cargado a una tensión de 5 voltios. Se pide representar gráficamente la tensión en el condensador cuando la corriente que lo atraviesa varía con el tiempo según la figura P5.1.

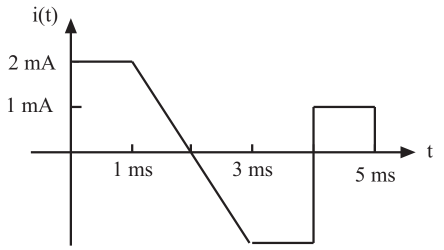

Fig. P5.1

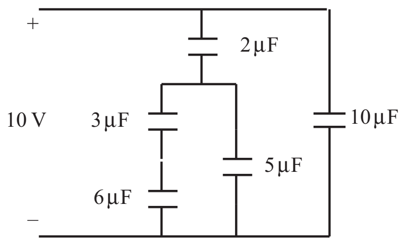

Fig. P5.3

P5.2 Sean tres condensadores C_1 (capacidad 0,2 μF y tensión máxima 250 V), C_2 (0,02 μF y 250 V) y C_3 (0,05 μF y 500 V). ¿Cuál es la máxima tensión que puede aplicarse al circuito formado por el condensador C_1 en serie con el conjunto "C_2 en paralelo con C_3"?

P5.3 Calcule la capacidad equivalente del circuito de la figura P5.3 y obtenga el valor de la carga almacenada en cada uno de los condensadores, suponiendo que en algún instante estuvieran todos descargados.

P5.4 Simplifique el circuito P5.4. Suponga nulo el acoplamiento magnético entre bobinas.

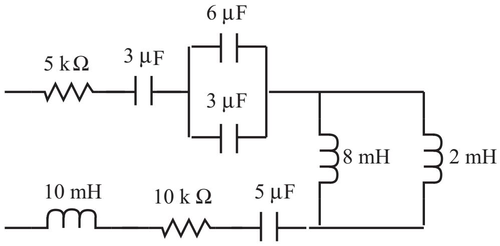

Fig. P5.4

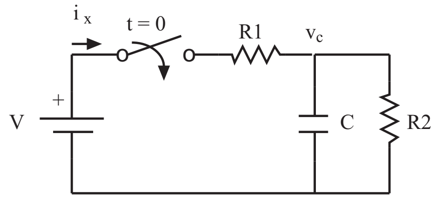

Fig. P5.5

P5.5 Calcule la tensión v_C y la corriente $i_x(t)$ en el circuito de la figura P5.5 para tiempos mayores y menores que cero, suponiendo que en el instante t = 0 cerramos el interruptor.

P5.6 Dado el circuito de la figura P5.6: a) Determine las condiciones iniciales y finales de v_C. b) Obtenga el circuito equivalente de Thévenin que "ve" el condensador antes y después de cerrar en interruptor. c) Compruebe que los valores obtenidos en los apartados a) y b) son coherentes entre sí. d) Obtenga las expresiones de $v_C(t)$ e $i_C(t)$ y represéntelas gráficamente suponiendo que todas las fuentes y resistencias sean iguales.

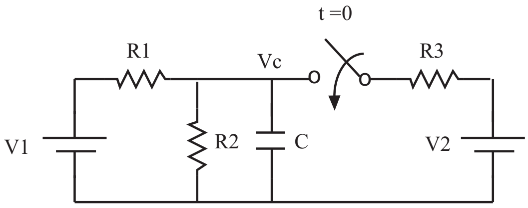

Fig. P5.6

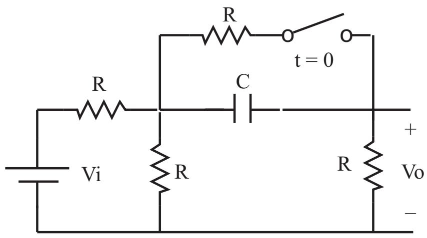

Fig. P5.9

P5.7 Sea un condensador C cargado inicialmente a una tensión de 1 voltio. Se descarga a través de una resistencia R. Calcule: a) la tensión $v_C(t)$ en el condensador durante la descarga; b) el valor de R para que v_C decaiga el 63% a los 10 ms de iniciar la descarga; c) la potencia instantánea p(t) entregada por el condensador.

P5.8 Se tiene un circuito RC como el de la figura 5.9 del apartado 5.2.1, en el que V_a = 10 V, R = 1 MΩ y C = 10 μF. Se mide la tensión en el condensador con un voltímetro cuya resolución (capacidad de distinguir entre dos valores próximos) es del 0,1% para la escala de 10 V. ¿A partir de qué momento no se puede distinguir la variación de la tensión medida?

P5.9 Calcule la tensión de salida $v_o(t)$ en el circuito de la figura P5.9.

P5.10 Calcule $i_C(t)$, $i_1(t)$ y $v_C(t)$ en el circuito de la figura P5.10, suponiendo que el interruptor se cierra en el instante t = 0 y que el condensador ha sido cargado previamente a una tensión $V_C(0)$ = 20 V.

P5.11 El conmutador del circuito de la figura P5.11 permanece en la posición 1 durante el tiempo suficiente para que C está descargado. A partir de entonces conmuta cada segundo entre las posiciones 1 y 2. Represente gráficamente de forma aproximada $v_C(t)$ para los casos C = 0,1 μF, C = 0,3 μF y C = 1μF.

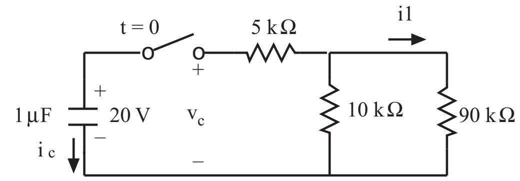

Fig. P5.10

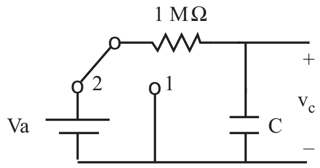

Fig. P5.11

P5.12 En la figura P5.12 se muestra la posición $P_S(t)$ del conmutador en función del tiempo. Se pide obtener las formas de onda de la intensidad $i_C(t)$ y de la tensión $v_C(t)$. Tomar C = 200 nF y suponer que en t < 0 el conmutador permanece en la posición 2.

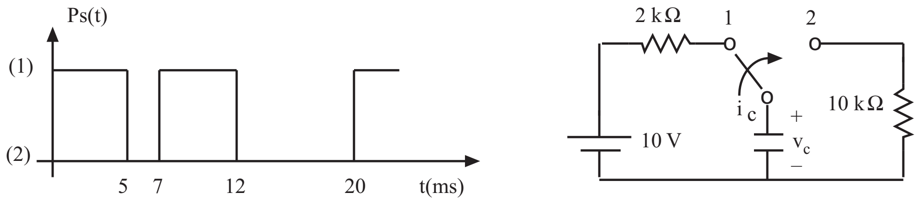

Fig. P5.12

P5.13 En el circuito de la figura P5.13 el interruptor pasa de la posición 1 a la 2 después de haber permanecido en 1 un tiempo suficientemente largo para que se cargue totalmente el condensador C. Se pide: a) Calcular la ecuación de la $v_o(t)$ resultante tras conmutar a la posición 2, suponiendo que el origen de tiempo se toma en el instante de realizar la conmutación. b) Encontrar la relación entre R_2 y R_3 para la que v_o alcanza un valor máximo de 5 V. c) Dibujar $v_o(t)$ teniendo en cuenta el valor de la constante de tiempo. d) ¿Cuánto tendría que valer R_1 para que v_o alcance su valor máximo o mínimo, en cada transición de la entrada en menos de 15 ms? Datos: R_1 = 50 kΩ y C = 10 μF y v_i = 1 V.

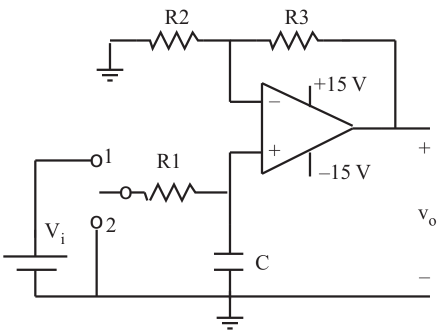

Fig. P5.13

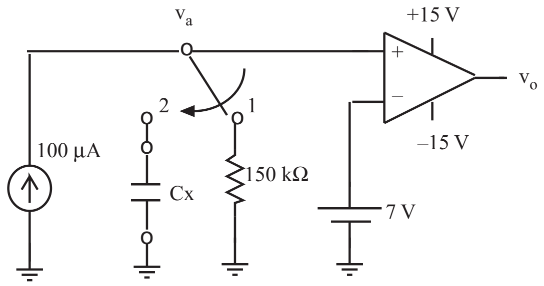

Fig. P5.14

P5.14 Se desea medir la capacidad de un condensador C_x. Para ello, se emplea el circuito de la figura P5.14 en el que el conmutador pasa de la posición 1 a la 2 en un momento dado. a) Encuentre la expresión de $v_a(t)$ y represéntela gráficamente. b) Represente $v_o(t)$ a partir de $v_a(t)$.

c) ¿Cómo podemos encontrar el valor de C_x a partir de $v_o(t)$? d) Repita los apartados anteriores, a, b y c, sustituyendo la fuente de corriente de 100 μA por una fuente de tensión de 15 V en serie con una resistencia de 150 kΩ.

P5.15 Obtenga la expresión de $i_2(t)$ en el circuito P5.15 suponiendo que antes de la conmutación la corriente en la bobina haya alcanzado el régimen permanente. Datos: R_1 = 10 kΩ, R_2 = 5 kΩ, L = 10 mH y v_1 = 10 V.

P5.16 Calcule, y represente gráficamente, la corriente $i_L(t)$ del circuito de la figura P5.16.

P5.17 Calcule $I_L(t)$ en los circuitos de la figura P5.17 suponiendo que antes de la conmutación el circuito esté en régimen estacionario.

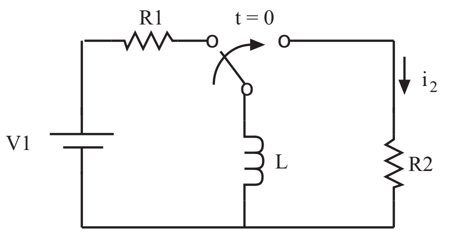

Fig. P5.15

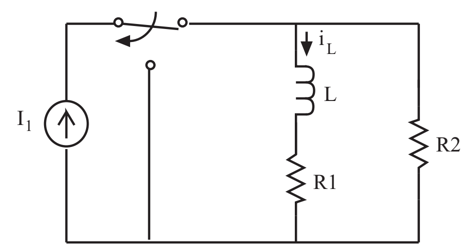

Fig. P5.16

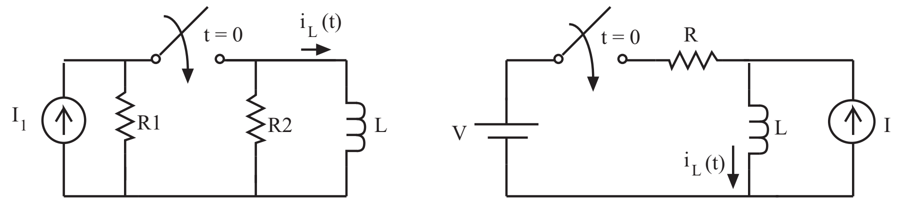

Fig. P5.17

P5.18 Dibuje cualitativamente la respuesta del circuito RL de la figura P5.18 a una señal cuadrada v_s de amplitud A y período T para L/R = T/10 y para L/R = T/2. Suponga $v_o(0)$ = A.

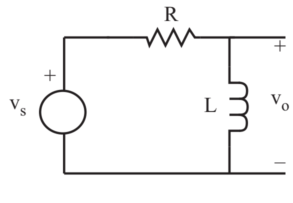

Fig. P5.18

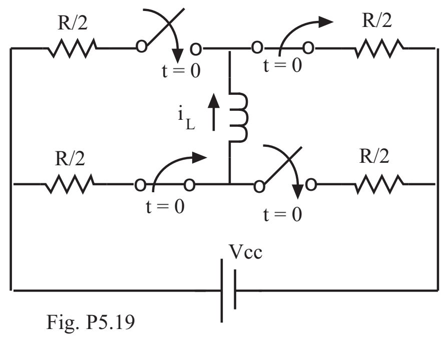

Fig. P5.19

P5.19 Dibuje la forma de onda de la corriente en la bobina del circuito de la figura P5.19, donde: V_{CC} = 10 V, R = 10 Ω y L = 10 mH.

P5.20 Halle i(t) en el circuito P5.20. Datos: $v_1(t) = 10\text{sen}(wt)$, $n = 10$, $R = 10\ k\Omega$.

P5.21 Halle los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton del circuito P5.21.

P5.22 Sea un transformador ideal constituido por tres devanados idénticos, según se representa en la figura P5.22. Determine la resistencia que se ve desde uno de los devanados en cada una de las circunstancias siguientes: a) Cuando los otros devanados se conectan en serie adicional y se hallan conectados a una carga R. Nota: La conexión en serie adicional se caracteriza porque las tensiones inducidas en ambos devanados tienen el mismo sentido. b) Cuando cada uno de los otros devanados está conectado a una resistencia R. c) Cuando sólo uno de los devanados está conectado a una resistencia R, quedando el otro en circuito abierto. d) Cuando los otros devanados están conectados en paralelo y cargados con una resistencia R.

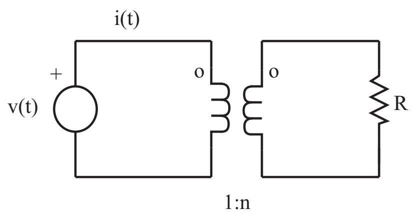

Fig. P5.20

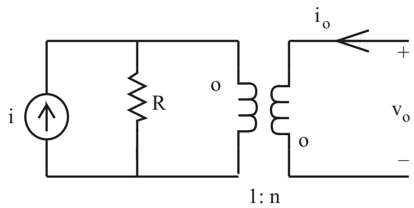

Fig. P5.21

P5.23 Un transformador cuyo rendimiento es del 80% entrega energía de red a un equipo electrónico cuyo consumo es de 50 VA. Determine el valor mínimo del fusible de protección que debe colocarse en el circuito primario del transformador. Se supone que la tensión de red es alterna de 220 V_{ef} y 50 Hz.

P5.24 Un transformador no puede transferir la corriente continua e invariable en el tiempo, ya que al no existir variación del flujo magnético no existe tensión inducida en el bobinado secundario. Sin embargo, al aplicar al primario una función escalón existe una variación brusca del flujo magnético que da lugar a una inducción de tensión en el secundario que disminuye exponencialmente con el tiempo. Este efecto se modela mediante una inductancia a la entrada que se denomina inductancia de magnetización L_m. Escriba la expresión de la tensión de salida $v_o(t)$ en función de los elementos del circuito dibujado en la figura 5.24.

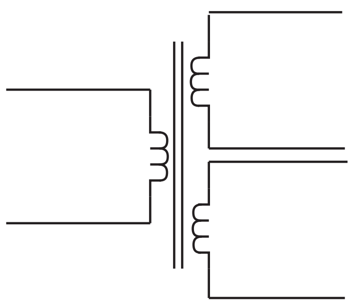
Fig. P5.22

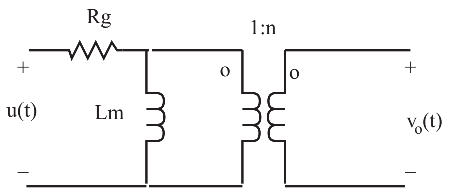

Fig. P5.24