# Capítulo 2
# Circuitos resistivos

## 2.1 Concepto de resistencia

Todos los componentes electrónicos presentan algún tipo de relación entre la tensión aplicada a sus terminales y la corriente que los atraviesa. En el capítulo anterior, se vio que la característica corriente-tensión de una fuente independiente de tensión continua ideal era una recta vertical que representaba el comportamiento de la fuente: mantener una tensión constante entre terminales con independencia de la corriente que circula. Se denominan *elementos resistivos* a los elementos que disipan energía y que cumplen que la relación entre la tensión que se aplica a sus terminales y la corriente que los atraviesa pueda ser representada por una gráfica en los ejes cartesianos corriente-tensión (figura 2.1). Esta gráfica está limitada a los cuadrantes primero y tercero ya que la potencia que disipan es positiva.



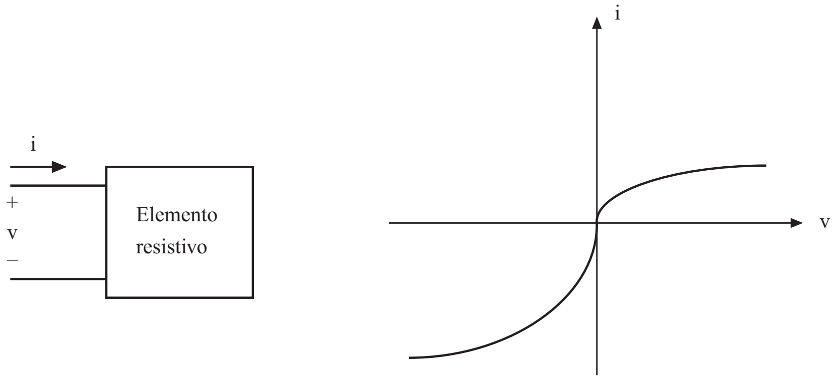


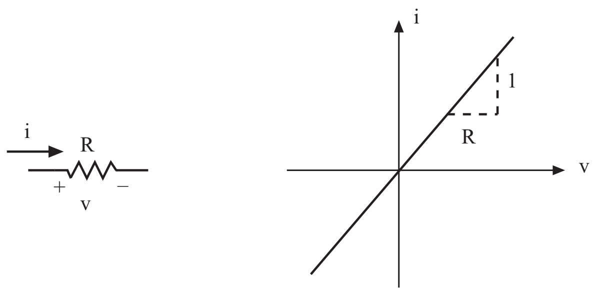

Fig. 2.1 Ejemplo de característica i-v de un elemento resistivo

Como se verá en los próximos capítulos muchos componentes y dispositivos electrónicos (resistencias, diodos, transistores,...) se comportan como elementos resistivos en determinados ámbitos de operación. Sin embargo, no todos los elementos de circuito son resistivos. Por ejemplo, en los condensadores, la tensión entre terminales es proporcional a la integral de la corriente, mientras que en los inductores, la tensión es proporcional a la derivada de la corriente. El objetivo de este capítulo es estudiar uno de estos elementos resistivos denominado *resistencia*, y los circuitos en los que interviene conjuntamente con los elementos vistos en el capítulo anterior.

La *resistencia lineal ideal* es un elemento de circuito cuya característica i-v es una recta que pasa por el origen (figura 2.2b). Analíticamente esta recta viene dada por la ecuación:

$$i = \frac{v}{R} \qquad (2.1)$$

donde R, denominada resistencia, es la inversa de la pendiente de la recta, y es constante y positiva. A esta ecuación se la conoce como *ley de Ohm* : la caída de tensión entre los terminales de la resistencia es proporcional a la corriente que la atraviesa. Su símbolo circuital, el signo de la tensión v, y el sentido de la corriente i, se representan en la figura 2.2a.




a) b)

Fig. 2.2 a) Símbolo de la resistencia, sentido de la corriente y signo de la caída de tensión. b) Característica i-v de la resistencia



Una interpretación física del concepto de resistencia está implícito en su propio nombre: dificultad al paso de una corriente. Cuando se aplica una tensión entre los terminales, a mayor resistencia menor corriente, y viceversa. Obsérvese en la característica i-v de la resistencia que es un dispositivo simétrico ya que si se invierte el sentido de i también se invierte el de v. Nótese también que cuando la resistencia es nula la característica i-v es una línea vertical que coincide con el eje de ordenadas. Por esto, un interruptor cerrado, que en el capítulo anterior se vio que se comporta como un *cortocircuito*, se puede modelar por una resistencia de valor cero. Asimismo, cuando la resistencia es infinita, su característica i-v coincide con el eje de abscisas, por lo que un interruptor abierto, que se comporta como un *circuito abierto*, puede modelarse por una resistencia de valor infinito.

La unidad de resistencia es el *ohmio* (Ω). De la expresión (2.1) resulta:

1 ohmio = 1 voltio / 1 amperio

A la inversa de la resistencia se la denomina *conductancia*, e indica la facilidad al paso de corriente. Se la identifica con la letra G y su unidad es el inverso del ohmio ($\Omega^{-1}$), que se denomina *siemens* (S):

$$i = Gv \qquad (2.2)$$

Cuando una corriente atraviesa una resistencia, ésta absorbe energía del circuito y la convierte en calor. Este fenómeno se denomina *efecto Joule* y la potencia convertida en calor recibe el nombre de *potencia disipada* por la resistencia:

$$P_R = iv = i^2 R = \frac{v^2}{R} \qquad (2.3)$$

donde se ha hecho uso de la ley de Ohm.

El significado físico del valor eficaz de una señal en el intervalo de tiempo de 0 a T es fácil de entender a partir de la expresión 2.3. En efecto, si se considera una señal v(t), la potencia media que entrega a una resistencia R en un tiempo T es:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{(v(t))^2}{R}dt = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_0^T (v(t))^2\,dt\right]$$

Por definición, el valor eficaz sería el valor de una tensión constante que entregara a la resistencia R la misma potencia durante el tiempo T:

$$P_m = \frac{1}{R}V_{ef}^2$$

Identificando esta expresión con la anterior resulta la expresión del valor eficaz 1.19 vista en el capítulo anterior.

**Ejemplo 2.1**

Determinar la potencia que disipa una resistencia de 100 Ω cuando se aplica entre sus terminales una tensión de 15 V. ¿Cuál es el valor de la corriente que atraviesa la resistencia?

*Solución:*



$$P_R = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{100} = 2{,}25 \quad W$$
$$i = \frac{v}{R} = \frac{15}{100} = 150 \quad mA$$

**Ejercicio 2.1**

¿Cuál es la máxima corriente que puede circular a través de una resistencia de 100 Ω si ésta puede disipar una potencia máxima de 0,5 W?¿Cuál será la máxima tensión que se puede aplicar entre sus terminales?

*Solución:*

$$i_{\max} \cong 71 \quad mA; \quad v_{\max} \cong 7{,}1 \quad V$$

———— ♦ ————

La mayoría de dispositivos reales presentan efectos resistivos. Así por ejemplo, un conductor real presenta una variación de tensión entre sus extremos cuando es atravesado por una corriente. Un interruptor real cerrado también presenta una cierta resistencia entre sus terminales. Sin embargo, su valor es muy pequeño y se suele despreciar frente al resto de resistencias del circuito.

La *resistencia lineal real* es un dispositivo cuya característica i-v se puede aproximar por una recta dentro de unos ciertos márgenes de corriente y tensión, y por tanto se puede aproximar por una resistencia ideal entre dichos márgenes. En el apéndice A se detallan las principales propiedades, tipos y limitaciones de este dispositivo electrónico en su forma comercial. Existen en el mercado dispositivos electrónicos resistivos no lineales. Entre ellos destacan los *termistores NTC y PTC*, cuyo valor resistivo depende de la temperatura, y los *varistores*, cuyo valor resistivo depende de la tensión aplicada entre terminales. En el apéndice A también se detallan sus propiedades más significativas.

El *principio físico de la ley de Ohm* es el siguiente. Considérese, para simplificar, que el conductor sólo contiene cargas positivas, con una concentración de p cargas por unidad de volumen, siendo q el valor de cada carga. Un campo eléctrico E, que se supone constante en el interior del conductor, ejerce una fuerza sobre las cargas que, al ser móviles, las desplaza originándose una corriente i (ver figura 1.5a).

El movimiento "microscópico" de las cargas en el interior del conductor está constituido por tramos de movimiento uniformemente acelerado de cada carga. El movimiento comienza con velocidad inicial nula. La carga se acelera con una aceleración constante a de valor qE/m (m es la masa de la carga), y después de un tiempo $t_c$ colisiona con átomos del conductor a los que transfiere la energía cinética ganada. A consecuencia del choque la carga queda en reposo, e inmediatamente se inicia otro tramo de movimiento uniformemente acelerado.

Al analizar el movimiento descrito en el párrafo anterior desde un punto de vista "macroscópico", se considera que la partícula se mueve con una velocidad uniforme $v_p$ cuyo valor es igual a la velocidad media del movimiento "microscópico":

$$v_p = \frac{x_c}{t_c} = \frac{1/2 \cdot \mathrm{a} \cdot t_c^2}{t_c} = \left(\frac{qt_c}{2m}\right)E = \mu_p \cdot E$$



donde $x_c$ y $t_c$ son la longitud y tiempo medio entre colisiones. Nótese que la velocidad macroscópica es proporcional al campo eléctrico. A la constante de proporcionalidad, $\mu_p$, se la denomina movilidad. La corriente que producirán las cargas moviéndose a una velocidad uniforme $v_p$ (ver figura 1.5a), será:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q \cdot p \cdot [A \cdot v_p \Delta t]}{\Delta t} = qApv_p = qAp\mu_p E$$

puesto que las cargas que atravesarán la sección A son las contenidas en el cilindro de base A y altura $v_p.\Delta t$. Si el conductor tiene una longitud L y entre sus terminales está aplicada una diferencia de potencial V, el campo eléctrico en el interior del conductor será E=V/L, con lo que la expresión de la corriente será:

$$i = qAp\mu_p \frac{V}{L} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{q\mu_p p}\frac{L}{A} i = \rho \frac{L}{A} i = R \cdot i$$

que es la expresión de la ley de Ohm. En la expresión anterior ρ se denomina resistividad del conductor, que depende de la concentración de sus cargas mobiles y de su movilidad. Nótese, por tanto, que la resistencia es proporcional a la resistividad del material, a la longitud del conductor y a la inversa de su sección.

Por otra parte, la energía que cede una partícula al colisionar con los átomos del conductor es:

$$w_u = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m (at_c)^2 = q\mu_p t_c E^2$$

y como en el conductor hay A·L·p partículas y cada una de ellas experimenta $1/t_c$ colisiones por segundo, la energía transferida al conductor por unidad de tiempo debido a las cosliones de las partículas que constituyen la corriente será:

$$P_R = \frac{ALp}{t_c} w_u = qAp\mu_p \frac{V^2}{L} = \frac{V^2}{R} = i^2 R$$

que no es más que la ley de Joule. Nótese que la ley de Ohm se basa en que la velocidad de las cargas es proporcional al campo eléctrico. Cuando el campo eléctrico alcanza valores muy elevados deja de cumplirse esta proporcionalidad y, en consecuencia, la ley de Ohm deja de ser válida.

## 2.2 Análisis de circuitos resistivos por el método de nudos

Analizar un circuito consiste en calcular las tensiones en todos sus nudos y las corrientes que circulan por sus elementos. Hay varios métodos para analizar un circuito. El *método de nudos* es un procedimiento sistemático para analizar circuitos que consiste en aplicar a sus nudos la ley de Kirchhoff de corrientes.

Supóngase por el momento que el circuito sólo tenga resistencias y generadores independientes de corriente. Para resolverlo por el método de análisis por nudos se seguirá el siguiente procedimiento:

1. Se asigna a un nudo el potencial de referencia (cero). A cada uno de los restantes nudos se le asigna una tensión respecto al nudo de referencia. Estas tensiones serán las incógnitas que se deberán determinar.
2. Se expresa para cada nudo, excepto para el de referencia, la ley de Kirchhoff de corrientes. Si en el circuito hay n nudos resultarán n-1 ecuaciones. Para ello se asigna a cada elemento, de forma arbitraria, un vector de corriente, y se escriben las ecuaciones de Kirchhoff en función de estas corrientes.
3. Se escribe cada una de las corrientes desconocidas en las ecuaciones anteriores en función de las tensiones de los nudos, haciendo uso de la ley de Ohm. Estas ecuaciones deben respetar el signo de la caída de tensión y el sentido de la corriente tal como se indica en la figura 2.2a.
4. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para hallar las tensiones de los nudos.
5. A partir de las tensiones de los nudos se hallan las variables deseadas del circuito. Cuando el valor numérico de una de las corrientes sea negativo, indica que el sentido real de esta corriente es contrario al que hemos arbitrariamente asignado en el apartado 2.



### Ejemplo 2.2

Aplicando el método de análisis por nudos, hallar la corriente que circula por la resistencia $R_3$, en el circuito de la figura 2.3a.

Notar que el circuito de la figura 2.3b es eléctricamente igual al de la 2.3a. Como la tensión de un conductor es la misma en todos sus puntos, todos los conductores unidos a un nudo están a la tensión del nudo.

1. *El circuito contiene cuatro nudos. La tensión de referencia ha sido asignada al nudo 0. Las tensiones en los nudos 1, 2 y 3 han sido designadas como $v_1$, $v_2$ y $v_3$., tal como se indica en la figura 2.3b.*

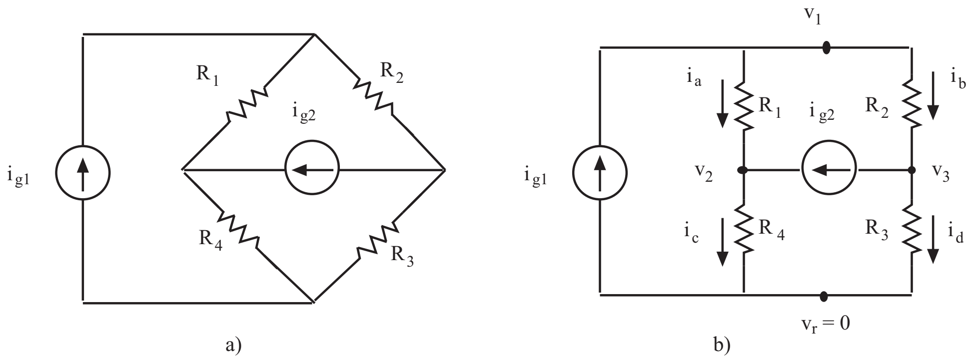



Fig. 2.3 a) Circuito del ejemplo 2.2. b) Tensiones y corrientes en el circuito

2. *La ley de Kirchhoff de corrientes conduce a las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} &Nudo\ \ 1 \rightarrow i_{g1} = i_a + i_b \\ &Nudo\ \ 2 \rightarrow i_{g2} + i_a = i_c \\ &Nudo\ \ 3 \rightarrow i_b = i_{g2} + i_d \end{aligned}$$

3. *Las corrientes desconocidas de las ecuaciones anteriores (es decir, todas excepto las de los generadores) se expresan, aplicando la ley de Ohm, de la siguiente forma:*

$$i_a = \frac{v_1 - v_2}{R_1} \qquad i_b = \frac{v_1 - v_3}{R_2}$$

$$i_c = \frac{v_2 - 0}{R_4} \qquad i_d = \frac{v_3 - 0}{R_3}$$

4. *Sustituyendo las expresiones del punto 3 en las ecuaciones del punto 2 resulta un sistema de tres ecuaciones con las tres incognitas $v_1$, $v_2$ y $v_3$. Por ejemplo, si los valores numéricos de las cuatro resistencias fueran todos de 1 **Ω** el sistema de ecuaciones resultante sería:*

$$\begin{aligned} &2v_1 - v_2 - v_3 = i_{g1} \\ &-v_1 + 2v_2 = i_{g2} \\ &v_1 - 2v_3 = i_{g2} \end{aligned}$$

*Téngase en cuenta que los coeficientes de las tensiones en estas ecuaciones tienen dimensiones de $\Omega^{-1}$. Una vez resuelto el sistema, se obtiene:*

$$v_1 = i_{g1} \qquad v_2 = \frac{1}{2}(i_{g1} + i_{g2}) \qquad v_3 = \frac{1}{2}(i_{g1} - i_{g2})$$

5. *La corriente que circula por $R_3$ puede calcularse a partir de $v_3$:*

$$i_{R_3} = i_d = \frac{v_3}{R_3} = v_3 = \frac{1}{2}(i_{g1} - i_{g2})$$

**Ejercicio 2.2**

Hallar la tensión $v_o$ en el circuito de la figura 2.4.

*Solución:*

$$v_o \cong 1{,}82 \ \ i_1$$

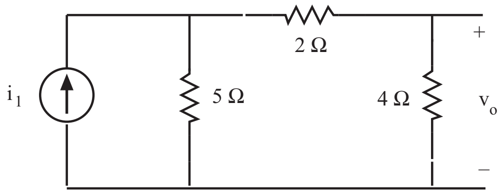



Fig. 2.4 Circuito del ejercicio 2.2

———— ♦ ————

El análisis de nudos tal como ha sido formulado anteriormente es de aplicación directa cuando el circuito contiene solamente generadores de corriente. Cuando el circuito contiene generadores de tensión la metodología anterior debe ser modificada puesto que la corriente que proporciona un generador de tensión no está predefinida: depende del circuito. Por esta razón cada generador de tensión introduce en el sistema de ecuaciones de nudos una incógnita extra: la corriente que proporciona este generador. Sin embargo, cada generador de tensión elimina una tensión incógnita, ya que fija la diferencia de tensión entre los nudos a los que está conectado. Se deben modificar, por tanto, los pasos 1 y 3 del procedimiento anterior. En el siguiente ejemplo se ilustran estos cambios.

**Ejemplo 2.3**



Aplicando el análisis de nudos, hallar la corriente que circula por $R_3$ en el circuito de la figura 2.5.

1. *La tensión $v_1$ vale, en este circuito, $v_{g1}$. Desaparece la incógnita $v_1$.*
2. *En el nudo 1 la corriente $i_{g1}$ del ejemplo 2.2 debe ser sustituida por la corriente $i_x$ que entrega la fuente de tensión.*
3. *La corriente $i_x$ no puede expresarse directamente a partir de las tensiones de los nudos. Es una nueva incógnita.*
4. *A partir de las consideraciones apuntadas en 1 y 2, el nuevo sistema a resolver es:*

$$i_x = \frac{v_{g1} - v_2}{R_1} + \frac{v_{g1} - v_3}{R_2}$$

$$i_{g2} + \frac{v_{g1} - v_2}{R_1} = \frac{v_2 - 0}{R_4}$$

$$\frac{v_{g1} - v_3}{R_2} = i_{g2} + \frac{v_3 - 0}{R_3}$$

*que, en el caso en que todas las resistencias sean de 1Ω, conduce a:*

$$i_x + v_2 + v_3 = 2v_{g1}$$

$$2v_2 = i_{g2} + v_{g1}$$

$$-2v_3 = i_{g2} - v_{g1}$$

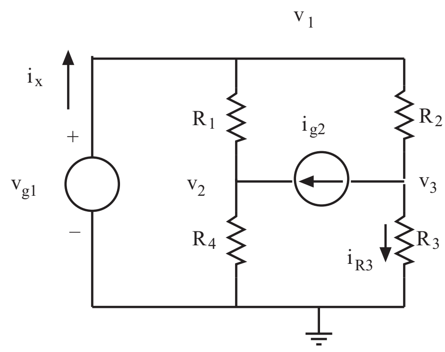



Fig. 2.5 Circuito del ejemplo 2.3

*cuya solución es:*

$$i_x = v_{g1}$$

$$v_2 = \frac{v_{g1} + i_{g2}}{2}$$

$$v_3 = \frac{v_{g1} - i_{g2}}{2}$$

*Por lo tanto:*

$$i_{R3} = \frac{v_3}{R_3} = \frac{1}{2}(v_{g1} - i_{g2})$$

**Ejercicio 2.3**

Resolver el circuito del ejercicio 2.2 sustituyendo la fuente $i_1$ por una fuente de tensión de valor $v_a$.

*Solución:*

$$v_o = \frac{2v_a}{3}$$

## 2.3 Análisis de circuitos resistivos por el método de mallas



Otro método sistemático para analizar circuitos es el método de mallas, que se basa en la aplicación de la ley de tensiones de Kirchhoff a cada una de las mallas de un circuito. A efectos de simplicidad, se eligirán las mallas que no contengan ningún componente en su interior. A cada malla se le asigna una "corriente de malla". Por cada componente de circuito circulará una corriente que será la suma algebraica de las corrientes de malla que afecten al componente en cuestión. Supóngase, por el momento, que el circuito sólo tiene generadores de tensión. El procedimiento que se seguirá para analizarlo por el método de mallas es el siguiente:

1. Se asigna a cada malla del circuito sin componentes internos una "corriente de malla". Estas serán las incógnitas que se deberán calcular.
2. Se expresa para cada malla la ley de Kirchhoff de tensiones, recorriéndola según el sentido indicado por la corriente de malla. Habrá tantas ecuaciones como mallas. Para ello se asigna a cada componente, de forma arbitraria, una caída de tensión, y se escriben las ecuaciones de Kirchhoff en función de estas caídas de tensión.
3. Se escribe la tensión entre los terminales de cada resistencia en función de las corrientes de malla que circulan por dicho componente, aplicando la Ley de Ohm. La corriente total que atraviesa la resistencia es la suma algebraica de las corrientes de malla que circulan a través de esta resistencia, asignando a una corriente de malla el signo positivo si su sentido es de "+" a "–" en la caída de tensión, y negativo en caso contrario.
4. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para hallar las corrientes de malla.
5. A partir de las corrientes de malla se hallan las variables deseadas del circuito. Si el valor numérico de una caída de tensión en una resistencia es negativo, significa que su polaridad es contraria a la que se le ha asignado en el punto 2.

**Ejemplo 2.4**

En el circuito de la figura 2.6a hallar la tensión en el punto A respecto a masa.

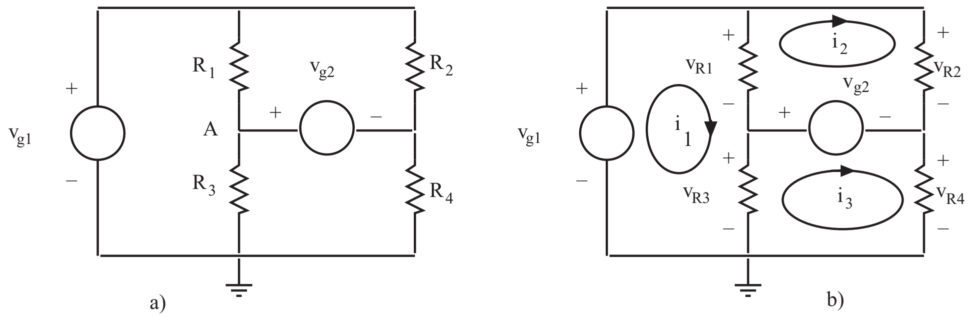



Fig. 2.6 a) Circuito del ejemplo 2.4. b) Tensiones y corrientes para el análisis

1. *Como se indica en la figura 2.6b, el circuito tiene tres mallas sin componentes internos a las que se les asigna las corrientes* $i_1$, $i_2$, $i_3$.

2. *Las ecuaciones de malla son:*

$$\begin{aligned} &malla\ \ 1 \rightarrow v_{g1} = v_{R1} + v_{R3} \\ &malla\ \ 2 \rightarrow v_{g2} + v_{R1} = v_{R2} \\ &malla\ \ 3 \rightarrow v_{R3} = v_{g2} + v_{R4} \end{aligned}$$



3. *Las diferencias de tensión en los componentes del circuito son, según la ley de Ohm:*

$$\begin{aligned} v_{R1} &= R_1(i_1 - i_2) \\ v_{R2} &= R_2 i_2 \\ v_{R3} &= R_3(i_1 - i_3) \\ v_{R4} &= R_4 i_3 \end{aligned}$$

4. *Sustituyendo las expresiones del punto 3 en las ecuaciones del punto 2 se obtiene un sistema de tres ecuaciones con las incógnitas* $i_1$, $i_2$, $i_3$. *Si los valores de todas las resistencias fueran de 1* $\Omega$, *las ecuaciones resultantes serían:*

$$i_1 = v_{g1} \qquad i_2 = \frac{1}{2}(v_{g1} + v_{g2}) \qquad i_3 = -\frac{1}{2}(v_{g1} - v_{g2})$$

5. *La tensión en el punto A se calcula a partir de las corrientes de malla:*

$$v_A = v_{R3} = R_3(i_1 - i_3) = \frac{R_3}{2}(v_{g1} + v_{g2})$$

**Ejercicio 2.4**

Aplicando el método de análisis por corrientes de malla, hallar la tensión en el punto P respecto a masa del circuito de la figura 2.7.

*Solución:*

$$V_P = \frac{4V_A + V_B}{7}$$

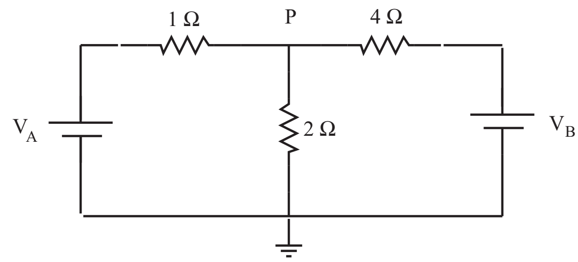



Fig. 2.7 Circuito del ejercicio 2.4

———— ♦ ————

Cuando el circuito contiene generadores de corriente, el procedimiento acabado de exponer debe ser modificado puesto que la tensión entre los terminales de un generador de corriente no es una cantidad predefinida: se ajusta a lo que demanda el circuito a fin de que se cumplan las leyes de Kirchhoff. De forma similar a lo que ocurría en el análisis por nudos cuando en el circuito aparecía un generador de tensión, en el análisis por mallas un generador de corriente permite eliminar como incógnita una corriente de malla, y obliga a considerar como nueva incógnita la tensión entre los terminales del mismo.

**Ejemplo 2.5**



Resolver, aplicando el método de análisis por mallas, el circuito del ejemplo 2.3.

*Se denominará $v_x$ a la diferencia de tensión entre los terminales de la fuente de corriente $i_{g2}$ (tensión en el terminal de la izquierda menos tensión en el terminal de la derecha), y se utilizarán corrientes de malla similares a las definidas en la figura 2.6b.*

1. *Puesto que $i_2 - i_3 = i_{g2}$, una de estas dos corrientes incógnitas puede ser eliminada. Por ejemplo:*

$$i_2 = i_{g2} + i_3$$

2. *Las ecuaciones de las mallas 2 y 3 deben ser modificadas incluyendo la tensión entre terminales de la fuente de corriente $i_{g2}$. La tensión $v_x$, será una nueva incógnita. Las ecuaciones que se deben resolver son:*

$$\begin{aligned} &malla\ \ 1 \rightarrow v_{g1} = R_1(i_1 - i_2) + R_4(i_1 - i_3) \\ &malla\ \ 2 \rightarrow v_x + R_1(i_1 - i_2) = R_2 i_2 \\ &malla\ \ 3 \rightarrow R_4(i_1 - i_3) = v_x + R_3 i_3 \end{aligned}$$

3. *Teniendo en cuenta la nueva ecuación del apartado 1 y suponiendo para todas las resistencias el valor de 1 **Ω**, el sistema para resolver sería:*

$$\begin{aligned} &2i_1 - 2i_3 = v_{g1} + i_{g2} \\ &v_x + i_1 - 2i_3 = 2i_{g2} \\ &-v_x + i_1 - 2i_3 = 0 \end{aligned}$$

*cuya solución es:*

$$v_x = i_{g2}$$
$$i_1 = v_{g1}$$
$$i_3 = \frac{1}{2}(v_{g1} - i_{g2})$$

**Ejercicio 2.5**

Hallar la tensión del punto P del circuito de la figura 2.8.

*Solución:*

$$V_P = \frac{2(V_A + I_B)}{3}$$

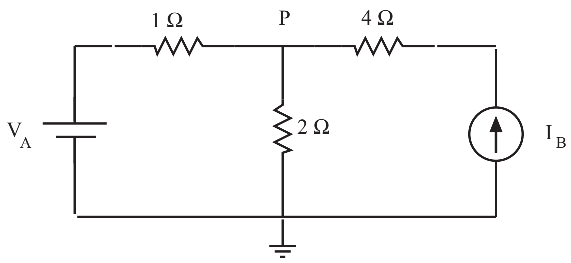



Fig. 2.8 Circuito del ejercicio 2.5

## 2.4 Concepto de circuito equivalente



Considérese el circuito de la figura 2.9a encerrado dentro de una "caja negra", que permite que aparezcan al exterior únicamente los dos terminales A y B. Cualquier otra "caja negra" que contenga un circuito de dos terminales, y que a través de medidas de corriente y tensión en dichos terminales sea indistinguible de la anterior, se dice que es equivalente a la primera.

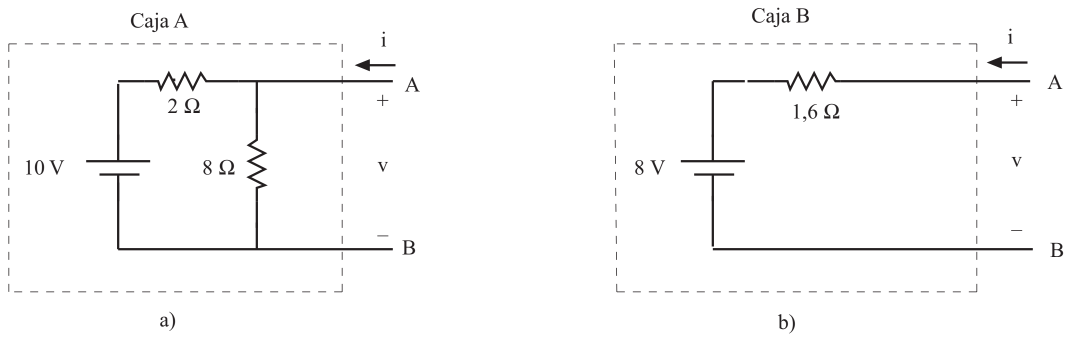



Fig. 2.9 Circuitos equivalentes encerrados en "cajas negras"

Imagínese que la segunda caja contiene el circuito de la figura 2.9b. Para intentar distinguir las dos cajas negras se podría conectar entre los dos terminales de salida una fuente de tensión de valor variable y medir para cada tensión la corriente que circula por los terminales (figura 2.10).

La corriente i, de entrada a la caja A, será la suma de las corrientes que circulan por las resistencias de 2 Ω y 8 Ω:

$$i = \frac{v-10}{2} + \frac{v}{8} = \frac{v}{1,6} - 5$$

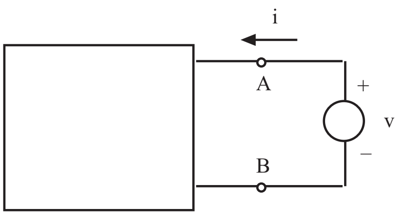



Fig. 2.10 Medida de la característica i-v de una "caja negra"

mientras que para la caja B la corriente de entrada será:

$$i = \frac{v-8}{1,6} = \frac{v}{1,6} - 5$$

de donde resulta idéntica corriente para ambas cajas, cualquiera que sea el valor de v. Lo mismo sucedería si se conectara entre los terminales de salida una fuente de corriente de valor variable y se midiera la tensión entre terminales. Las dos cajas resultan eléctricamente indistinguibles, y en consecuencia se dice que son equivalentes.

El concepto de circuito equivalente se usa extensamente en electrónica para describir el funcionamiento de dispositivos. En estos casos se dice que el dispositivo se comporta como su circuito equivalente y son por tanto intercambiables. También se usa para simplificar circuitos.

## 2.5 Resistencias en serie. El divisor de tensión

Se dice que dos resistencias están en *serie* cuando comparten un nudo común al cual no hay conectado ningún otro elemento. En consecuencia la corriente que las atraviesa es la misma. En la figura 2.11a se representan las resistencias $R_1$ y $R_2$ conectadas en serie. Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff resulta:



$$V_G = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \tag{2.4}$$

En la figura 2.11b se presenta un circuito equivalente de las dos resistencias conectadas en serie, una única resistencia de valor $R_s$. En efecto, la ley de tensiones de Kirchhoff aplicada a este segundo circuito establece que:

$$V_G = IR_s \tag{2.5}$$

e identificando con 2.4 resulta:

$$R_s = R_1 + R_2 \tag{2.6}$$

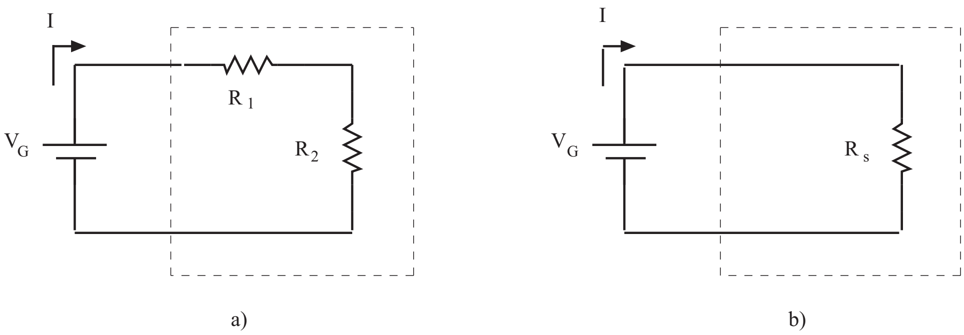



Fig. 2.11 a) Conexión de $R_1$ y de $R_2$ en serie. b) Resistencia equivalente

Cuando en lugar de dos resistencias hay n resistencias en serie, su circuito equivalente es una resistencia de valor la suma de todas ellas.

Considérese el circuito de la figura 2.12a. La tensión que aparece en los terminales de salida A y B es una fracción de la tensión $v_g$. Por esta razón se denomina a este circuito *divisor de tensión*. Cuando la corriente de salida por el terminal A es nula ($i_o = 0$), la tensión entre A y B puede calcularse de la siguiente forma:

$$v_o = iR_2 = \frac{v_g}{R_1 + R_2} R_2 = v_g \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.7}$$

Obsérvese que el factor que multiplica a $v_g$ en la última expresión es inferior a la unidad.

Existe en el mercado un componente denominado *resistencia variable* cuyo símbolo está incluido en la figura 2.12b. Consiste en una resistencia que tiene un tercer terminal que hace contacto en un punto intermedio de ella. Este punto de contacto puede desplazarse, a voluntad del usuario, desde un extremo al otro. Denominando $R_p$ a la resistencia total entre los terminales a y c, la resistencia entre el terminal b y el c es $xR_p$, y la resistencia entre los terminales a y b es $(1\text{-}x)R_p$. En estas expresiones, x puede variar entre 0 y 1. El comportamiento del circuito de la figura 2.12b es idéntico al de la 2.12a sin más que tomar como $R_1$ y $R_2$ las resistencias $(1\text{-}x)R_p$ y $xR_p$. Así, a partir de 2.7:

$$v_o = v_g \frac{xR_p}{(1-x)R_p + xR_p} = xv_g \tag{2.8}$$

Obsérvese que según la posición x del cursor, $v_o$ varía entre 0 y $v_g$.



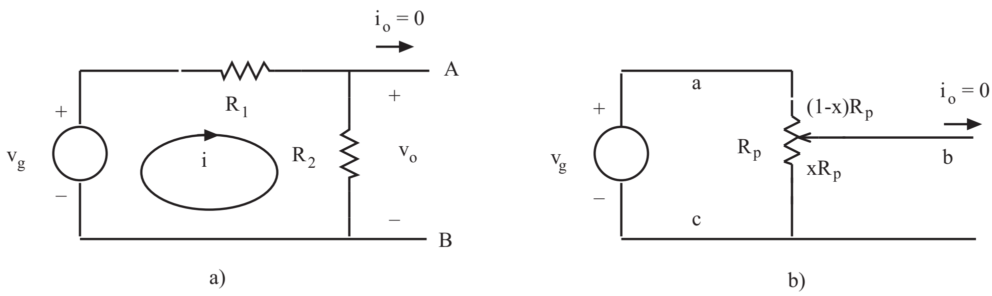



Fig. 2.12 a) Divisor de tensión. b) Resistencia variable como divisor de tensión

**Ejemplo 2.6**

¿Qué valor debe tener la resistencia $R_2$ del circuito de la figura 2.12a para que $v_{AB}$ sea la mitad de $v_g$?

*De acuerdo a la expresión 2.7, se requiere que $R_2 = R_1$.*

**Ejercicio 2.6**

En el circuito de la figura 2.12b el valor total de la resistencia variable es de 10 kΩ. Si la resistencia entre b y c es de 2 kΩ, ¿cuál es el valor de la tensión entre b y c, si $v_g$ es 5 V?¿Y entre a y b?

*Solución:* $V_{bc} = 1\ V$; $V_{ab} = 4\ V$

## 2.6 Resistencias en paralelo. El divisor de corriente

Se dice que dos resistencias están conectadas en *paralelo* cuando las dos están conectadas entre los mismos nudos. En consecuencia, la tensión entre sus terminales es la misma. En la figura 2.13a se representan dos resistencias conectadas en paralelo. Aplicando análisis de nudos al circuito de la figura 2.13a, obtenemos:

$$i_g = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = v\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] \tag{2.9}$$

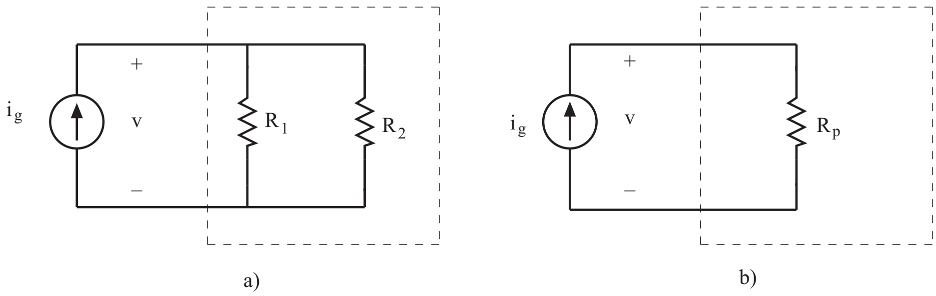



Fig. 2.13 a) Conexión en paralelo de $R_1$ y $R_2$ . b) Resistencia equivalente



En el circuito de la figura 2.13b se representa el circuito equivalente de dos resistencias conectadas en paralelo, una resistencia de valor $R_p$. Analizando por nudos este circuito, resulta:

$$i_g = \frac{v}{R_p} \tag{2.10}$$

Identificando 2.9 con 2.10 resulta que la inversa de la resistencia equivalente de dos resistencias conectadas en paralelo es la suma de las inversas de dichas resistencias:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2.11}$$

Esta expresión puede extenderse al caso de n resistencias en paralelo: la inversa de la resistencia equivalente es la suma de las inversas de las resistencias. En el caso de que hubiera *sólo dos* resistencias en paralelo, la expresión 2.11 puede presentarse de otra forma:

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.12}$$

La resistencia equivalente es el producto dividido por la suma de las dos resistencias. Esta última expresión no es generalizable al caso de más de dos resistencias en paralelo.

**Ejemplo 2.7**

Calcular la resistencia equivalente de: a) dos resistencias iguales en paralelo; b) n resistencias iguales en paralelo.
*a) Aplicando 2.12, si* $R_1 = R_2 = R$ *, resulta* $R_p = R/2$; *b) Aplicando 2.11 resulta* $R_p = R / n$

**Ejercicio 2.7**

Calcular el valor aproximado de la resistencia equivalente de dos resistencias $R_1$ y $R_2$ en paralelo, si $R_2$ es mucho mayor que $R_1$.
*Solución:* $R_p \approx R_1$

———— ♦ ————

Al circuito de la figura 2.13a se le denomina también *divisor de corriente.* La corriente $i_g$ que llega al nudo se divide entre la que circula por $R_1$ y la que circula por $R_2$. Esta última corriente, $i_2$, será $v/R_2$, y teniendo en cuenta 2.9 resulta:

$$i_2 = i_g \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{2.13}$$



que se puede enunciar diciendo que la corriente que circula por una rama es la corriente que entra al nudo, dividida por la suma de las resistencias de las dos ramas, y multiplicada por la resistencia de la otra rama.

**Ejercicio 2.8**

¿Qué valor debe tener $R_2$ en el divisor de corriente de la figura 2.13a si se desea que la corriente que la atraviesa sea la décima parte de la que entra al nudo?
*Solución:* $R_2 = 9\ R_1$

## 2.7 Reducción de circuitos resistivos

En el análisis de circuitos aparece con cierta frecuencia el problema de hallar la resistencia equivalente vista entre dos puntos. La utilización de los conceptos de *resistencia equivalente*, *serie* y *paralelo* permite resolver un gran número de casos, aunque hay que señalar que no siempre es posible. La consideración de dos ejemplos puede ilustrar esta problemática.

**Ejemplo 2.8**

Hallar la resistencia equivalente que "ve" la fuente de tensión $v_g$ de la figura 2.14.

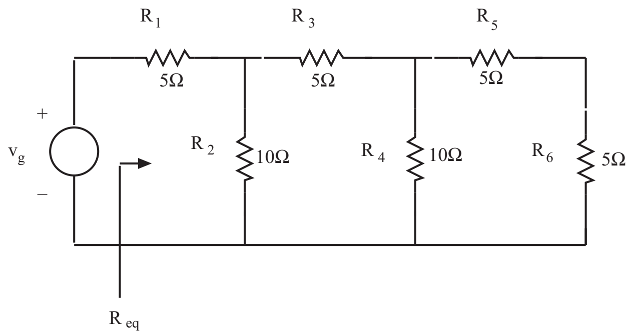



Fig. 2.14 Circuito del ejemplo 2.8

*Empezando el análisis por la parte derecha del circuito, se observa que las resistencias $R_6$ y $R_5$ están en serie. Equivalen a una resistencia de 10 Ω. Esta resistencia equivalente está a su vez en paralelo con $R_4$, agrupación que podemos sustituir por una resistencia de 5 Ω. Y, de nuevo, esta resistencia equivalente está conectada en serie con $R_3$, con lo que se repite el proceso anterior. Procediendo de esta forma puede determinarse fácilmente que la resistencia que "ve" la fuente $v_g$ es de 10 Ω.*

———— ♦ ————

Hay casos en los que no es posible reducir un circuito asociando las resistencias en serie y en paralelo y sustituyendo éstas por su resistencia equivalente. Un ejemplo es el circuito de la figura 2.16. En dicho circuito no hay ninguna resistencia en serie ni en paralelo. En la figura 2.15 se presentan algunas configuraciones típicas con resistencias.



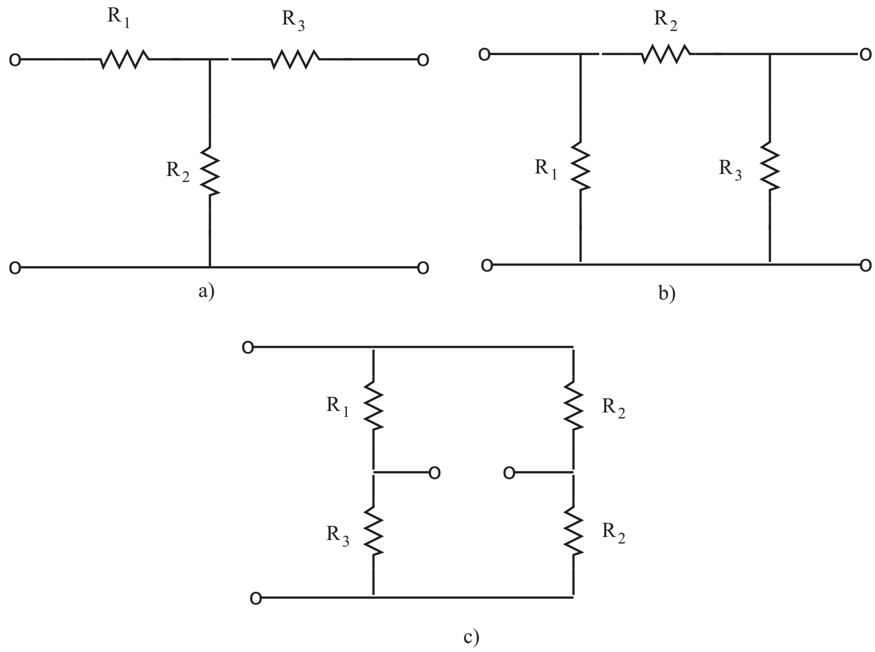



Fig. 2.15 Algunas configuraciones especiales de circuitos: a) Conexión en estrella o en T. b) Conexión en triángulo o en π. c) Conexión en puente

Un método más general, pero que sólo se emplea cuando el procedimiento anterior no puede aplicarse, consiste en conectar entre los puntos entre los que se desea calcular la resistencia equivalente un generador "de prueba" $v_x$. Calculando la corriente que entrega este generador, $i_x$, puede calcularse la resistencia equivalente haciendo:

$$R_{eq} = \frac{v_x}{i_x} \tag{2.14}$$

Si se encierra todo el circuito conectado al generador de prueba en una "caja negra", otro circuito consistente en una resistencia $R_{eq}$ daría la misma corriente $i_x$ que el primero, y por tanto sería equivalente.

**Ejemplo 2.9**

Calcular la resistencia equivalente vista desde los terminales A y B de la figura 2.16. Suponer las cinco resistencias de valor 1 Ω.

*En este circuito no se puede encontrar ninguna resistencia en serie ni en paralelo, y por tanto no se puede proceder a la simplificación del circuito como en el ejemplo anterior. En este caso, se conectará el generador de prueba $v_x$ entre los terminales A y B y se calculará $i_x$ haciendo uso, por ejemplo, del método de nudos. Las ecuaciones son:*

$$2v_x = i_x + v_2 + v_3$$
$$v_x = 3v_2 - v_3$$
$$v_x = -v_2 + 3v_3$$

*Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra que:*

$$i_x = v_x / 1\ \Omega$$

*Por tanto, la resistencia equivalente del circuito será:*

$$R_{eq} = \frac{v_x}{i_x} = 1\ \Omega$$

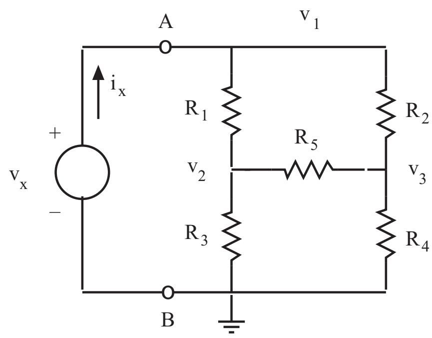


Fig. 2.16 Circuito del ejemplo 2.9



**Cuestiones**

**C2.1** Razonar, utilizando las leyes de Kirchhoff, si son correctos o no los circuitos siguientes:

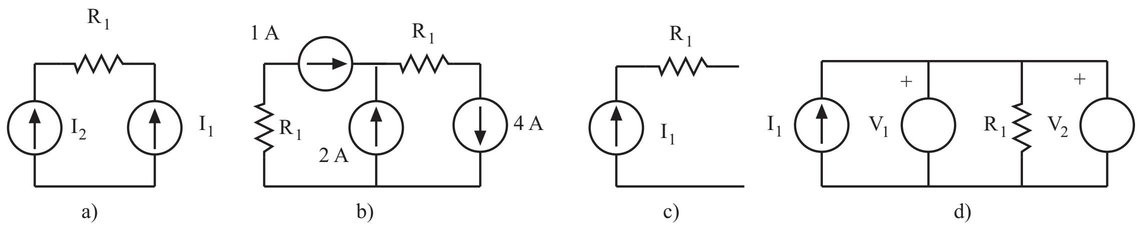


Fig. C2.1

**C2.2** La potencia media que disipa una resistencia cuando se le aplica una forma de onda senoidal y una forma de onda triangular, de igual amplitud, ¿es la misma? ¿Y si las señales tienen el mismo valor eficaz?

**C2.3** Si la potencia máxima que puede disipar una resistencia es $P_{max}$, ¿existe alguna restricción en cuanto a los valores máximos de tensión aplicada y de corriente que puede circular por ella?

**C2.4** ¿Puede ser negativa la potencia disipada en un elemento resistivo? ¿Y por un generador?

**C2.5** En un circuito se desea una resistencia de valor variable. Dibujar las dos posibles formas de montar dicha resistencia en el circuito.

**C2.6** Justificar a partir del divisor de corriente por qué al cortocircuitar una resistencia no pasa corriente por ella.

**C2.7** Demostrar que la fórmula $R_1//R_2=R_1R_2/(R_1+R_2)$ no es directamente extrapolable a más de dos resistencias.

**C2.8** Según los circuitos de la figura, ¿por qué resistencia ($R_a$, $R_b$, $R_c$, $R_d$ o $R_e$) pasará más corriente? Suponer que todas las resistencias tienen el mismo valor óhmico.

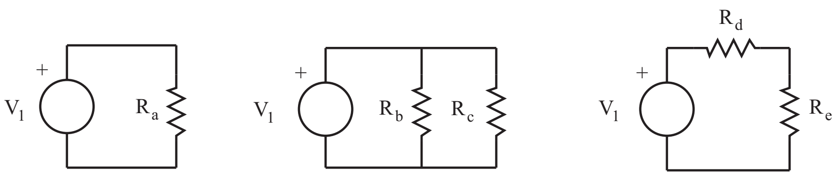



Fig. C2.8



**C2.9** ¿Es equivalente analizar un circuito aplicando el método de nudos que aplicando el método de mallas?

**C2.10** ¿Cuántas ecuaciones aparecen al aplicar la ley de Kirchhoff de corrientes en un circuito con N nudos? ¿Cuántas tensiones de nudo hay que calcular? ¿Por qué se pueden sustituir las corrientes que circulan por las resistencias? ¿Cuáles son los términos independientes?

**C2.11** Los dos circuitos equivalentes de la figura, ¿producen la misma disipación de potencia en la resistencia de carga $R_L$?

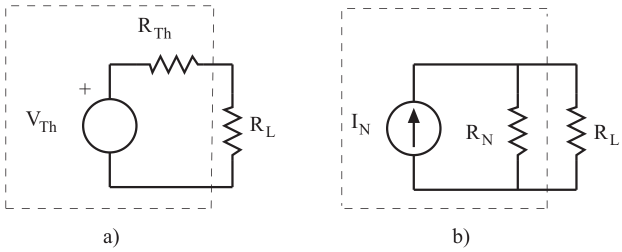



Fig. C2.11

**C2.12** Indicar algún motivo por el que, en algunas aplicaciones, las resistencias comerciales no puedan llegar a modelarse por resistencias ideales.

## Problemas

**P2.1** Hallar el valor de la resistencia para cada una de las características i-v de la figura P2.1.

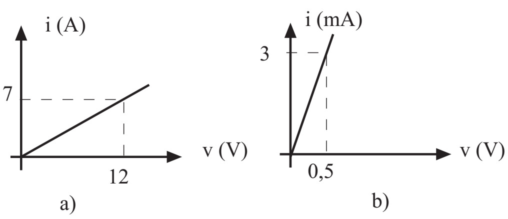



Fig. P2.1

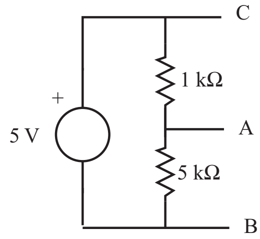



Fig. P2.3

**P2.2** La tensión entre los terminales de un elemento resistivo viene dada por 5·sen(ωt), y la corriente que la atraviesa por 15 sen(ωt). a) ¿Cuál es el valor de este elemento? b) ¿Cuál es la potencia media que disipa?

**P2.3** Hallar la característica i-v en el circuito de la figura P2.3 desde los terminales A-B, y desde C-A. ¿Es la misma? En conclusión, ¿la característica i-v depende de qué puntos del circuito se toma?

**P2.4** En la figura P2.4b se muestra la característica i-v del dispositivo activo. Se pide: a) Obtener un circuito equivalente sencillo para el dispositivo activo. b) Obtener la característica i-v del circuito resistivo. c) ¿Cuál sería el valor de la tensión y de la corriente a la entrada del dispositivo activo si se le conectara el circuito resistivo? d) Obtener en las condiciones del apartado anterior el valor de la tensión de salida $V_o$.

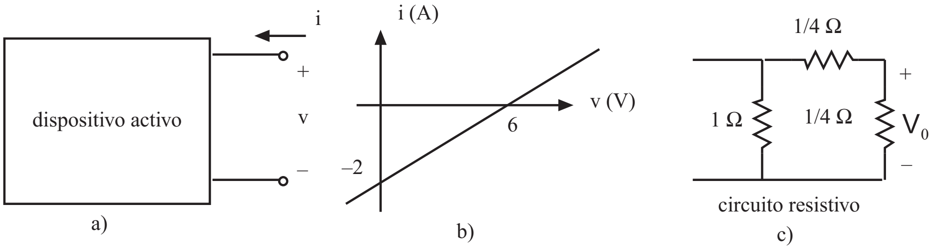



Fig. P2.4

**P2.5** Si una resistencia disipa 1 W de potencia cuando circula por ella una corriente de 10 mA, ¿qué tensión cae entre sus terminales? ¿Cuál es el valor óhmico de dicha resistencia?

**P2.6** ¿Cuál debe ser el valor de *x* del cursor del potenciómetro para que la resistencia R de la figura P2.6 disipe 36 mW de potencia?

**P2.7** En el circuito de la figura P2.7, calcular el valor de la potencia entregada (o recibida) por cada uno de los dos generadores.

**P2.8** Escribir las ecuaciones resultantes de aplicar las leyes de Kirchhoff en los siguientes circuitos:

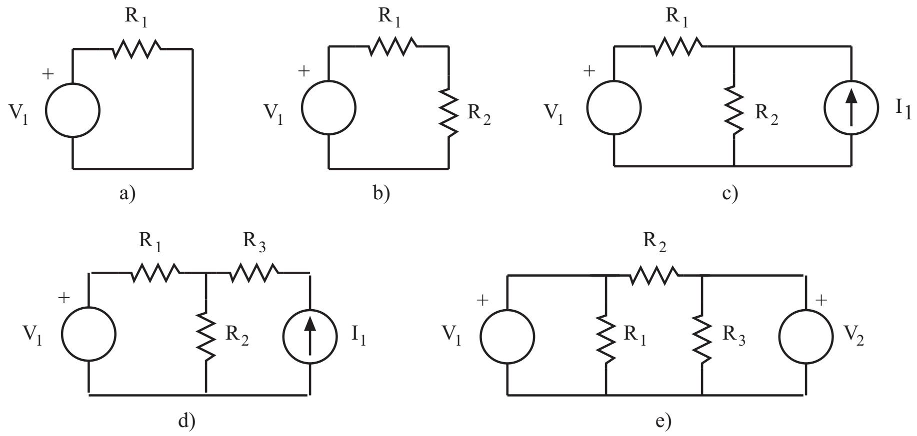



Fig. P2.8

**P2.9** Hallar $v_x$ por el método de nudos y $i_x$ por el de mallas.

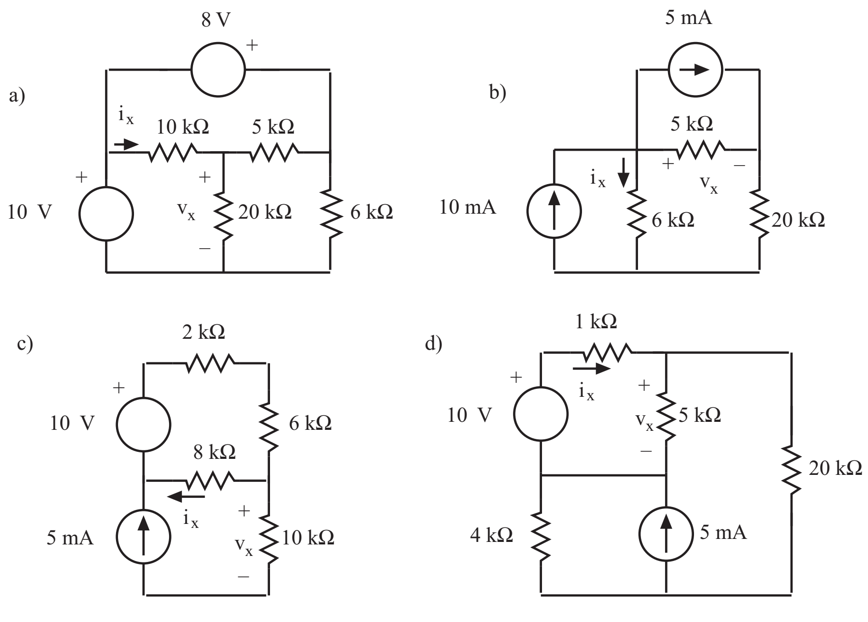



Fig. P2.9

**P2.10** Calcular $i_x$ en el circuito de la figura P2.10 empleando técnicas de reducción de resistencias y divisores de corriente.

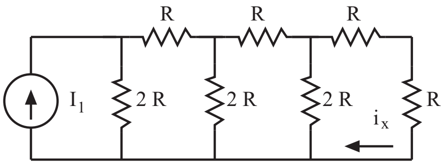



Fig. P2.10

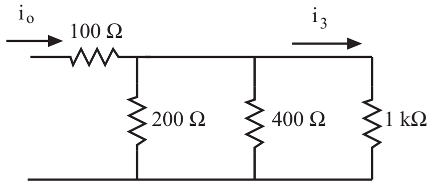



Fig. P2.11

**P2.11** Encontrar el valor de $i_o$ en el circuito de la figura P2.11 sabiendo que $i_3 = 5$ mA.

**P2.12** ¿Cuál ha de ser el valor de la alimentación $V_{cc}$ para que con los valores de las resistencias existentes en el circuito de la figura P2.12, $V_o$ sea de 2 V?

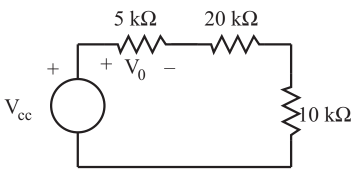



Fig. P2.12

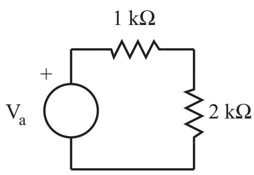



Fig. P2.13

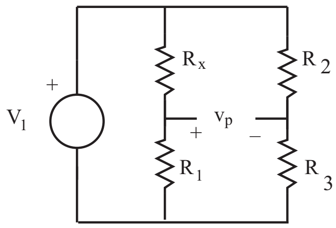



Fig. P2.14

**P2.13** Siendo 1 W la potencia máxima que pueden disipar cada una de las resistencias ¿cuál puede ser el valor máximo de la tensión $V_a$ aplicable al circuito de la figura P2.13 para no exceder la limitación de potencia de ninguna de las resistencias?

**P2.14** En el circuito de la figura P2.14, hallar el valor de $R_x$ si $R_1$, $R_2$ y $R_3$ son conocidos y si se cumple que $v_p = 0$.

**P2.15** Hallar la resistencia equivalente de los siguientes circuitos resistivos:

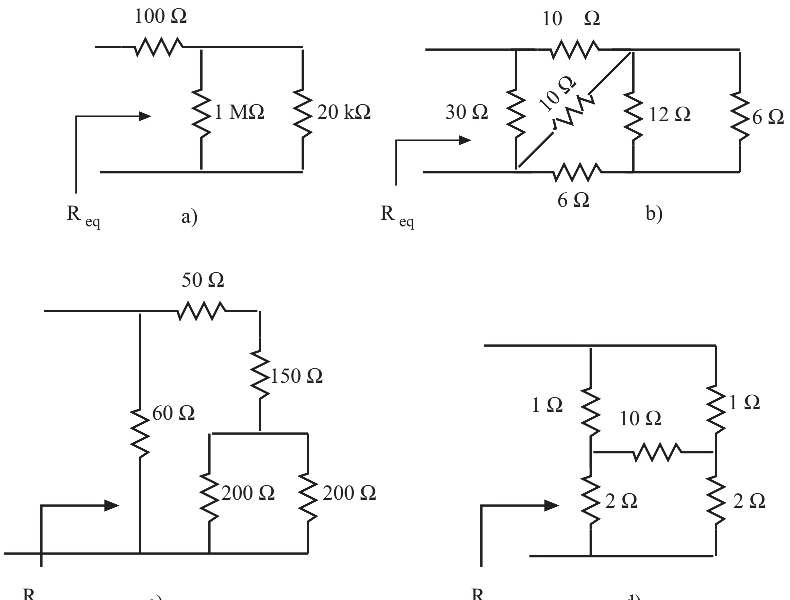



Fig. P2.15

**P2.16** Dado el circuito de la figura P2.16, se pide: a) Calcular la resistencia equivalente en A-A'. b) Calcular $i_2(V_o)$ y representarla gráficamente. c) Calcular $v_1(V_0)$ y representarla gráficamente. d) Potencia entregada por el generador de tensión $V_o$. e) Potencia disipada en $R_1$. f) Calcular $R_o$ para que la potencia disipada en $R_1$ sea máxima.

**P2.17** Encontrar los valores de $R_1$ y $R_2$ que forman la red de adaptación para que se cumplan las relaciones de resistencias vistas desde el generador y la carga de la figura P2.17.

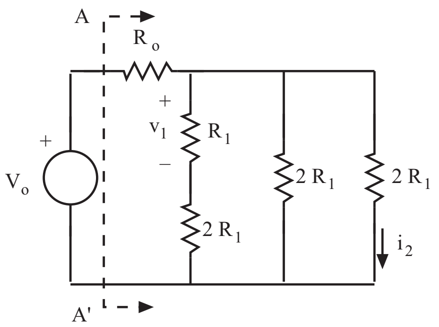



Fig. P2.16

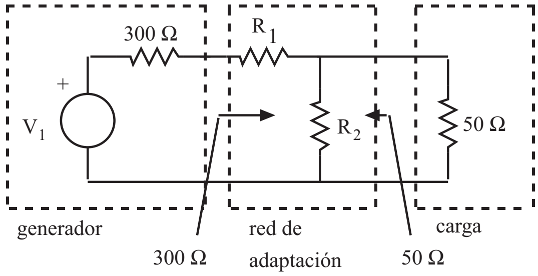



Fig. P2.17

**P2.18** Calcular la resistencia equivalente del circuito de la figura P2.18 (3 grupos en serie de 3 resistencias en paralelo cada uno).

**P2.19** Calcular la resistencia equivalente del circuito de la figura P2.19 (3 grupos en paralelo de 3 resistencias en serie cada uno).

**P2.20** Encontrar los valores de las resistencias $r_a$, $r_b$ y $r_c$ de la red en T en función de $R_A$, $R_B$ y $R_C$ de la red en π, de forma que ambas configuraciones sean equivalentes desde los terminales 1-2 y 3-4.

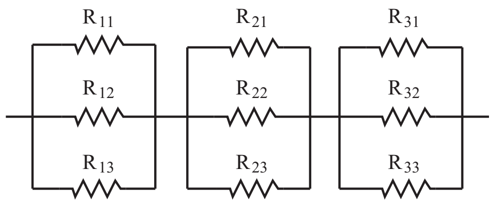



Fig. P2.18

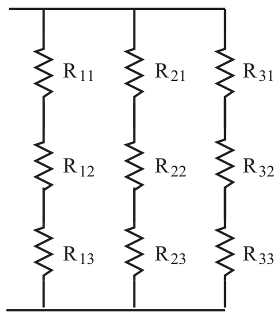



Fig. P2.19

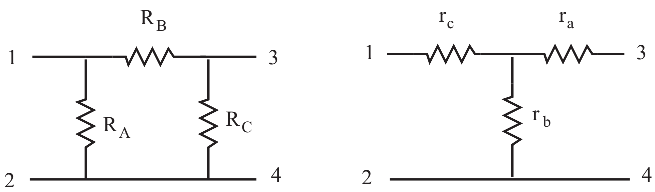



Fig. P2.20